C5

Fungsi Variasi Terbatas Ruang R^2

Dr. Susilo Hariyanto, S.Si., M.Si. lahir di Sukoharjo pada 14 Oktober 1974. Ia lulus S-1 di Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada (UGM) tahun 1999, S-2 di Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada (UGM) tahun 2002, dan S-3 di Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada (UGM) tahun 2015. Ia adalah pengajar tetap Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro Semarang sejak 2001 hingga saat ini. Bidang keahliannya yaitu Matematika Analisis dan Matematika Terapan.

Drs. Y. D. Sumanto, M.Si. lahir di Sleman pada 18 September 1964. Ia lulus S-1 di Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada (UGM) tahun 1990 dan S-2 di Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada (UGM) tahun 2002. Ia adalah pengajar tetap Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro Semarang sejak 1993 hingga saat ini. Bidang keahliannya yaitu Matematika Analisis.

Indah Dwi Murdianingsih, S.Mat., M.Mat. lahir di Demak pada 22 Juni 1997. Ia lulus S-1 di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegroro (UNDIP) tahun 2019, dan S-2 di Program Studi Magister Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro (UNDIP) tahun 2021.

Penerbit Deepublish (CV BUDI UTAMA)
Jl. Kaliurang Km 9,3 Yogyakarta 55581
Telp/Fax : (0274) 4533427
Anggota IKAPI (076/DIY/2012)
cs@deepublish.co.id
Penerbit Deepublish
@penerbitbuku_deepublish
www.penerbitdeepublish.com

Kategori :

Fungsi Variasi Terbatas Ruang R^2

Dr. Susilo Hariyanto, S.Si., M.Si. dkk.

Dr. Susilo Hariyanto, S.Si., M.Si.
Drs. Y.D. Sumanto, M.Si.
Indah Dwi Murdianingsih, S.Mat., M.Mat.

Fungsi Variasi Terbatas Ruang R^2

Dr. Susilo Hariyanto, S.Si., M.Si.
Drs. Y.D. Sumanto, M.Si.
Indah Dwi Murdianingsih, S.Mat., M.Mat.

Fungsi Variasi Terbatas Ruang R^2

Fungsi Variasi Terbatas Ruang R^2

UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4

Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26

Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

i. Penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
ii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
iii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
iv. Penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

Fungsi Variasi Terbatas Ruang R^2

Dr. Susilo Hariyanto, S.Si., M.Si.
Drs. Y.D. Sumanto, M.Si.
Indah Dwi Murdianingsih, S.Mat., M.Mat.

deepublish
Cerdas, Bahagia, Mulia, Lintas Generasi.

FUNGSI VARIASI TERBATAS RUANG R^2

Susilo Hariyanto, Y.D. Sumanto & Indah Dwi Murdianingsih

Desain Cover :
Dwi Novidiantoko

Sumber :
www.shutterstock.com

Tata Letak :
Titis Yuliyanti

Proofreader :
Meyta Lanjarwati

Ukuran :
vi, 66 hlm, Uk: 15.5x23 cm

ISBN :
No ISBN

Cetakan Pertama :
Bulan 2022

PENERBIT DEEPUBLISH
(Grup Penerbitan CV BUDI UTAMA)
Anggota IKAPI (076/DIY/2012)

Jl.Rajawali, G. Elang 6, No 3, Drono, Sardonoharjo, Ngaglik, Sleman
Jl.Kaliurang Km.9,3 – Yogyakarta 55581
Telp/Faks: (0274) 4533427
Website: www.deepublish.co.id
www.penerbitdeepublish.com
E-mail: cs@deepublish.co.id

PRAKATA

Rasa syukur alhamdulillah penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt. atas semua karunianya, sehingga penulis dapat menyelesaikan monograf berjudul *Fungsi Variasi Terbatas Pada Ruang* $\mathbb{R}^2$. Monograf ini merupakan hasil kajian penelitian penulis yang diawali dari mempelajari konsep fungsi variasi terbatas pada suatu interval di $\mathbb{R}^2$ dan selanjutnya dikembangkan untuk domain yang lebih luas yakni pada ruang metrik $\mathbb{R}^2$.

Pada kesempatan ini penulis juga menyampaikan bahwa monograf ini merupakan salah satu luaran hasil penelitian yang dilakukan oleh penulis yang dibiayai oleh pendanaan hibah penelitian dan pengabdian kepada masyarakat tahun 2021 dari Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada segenap pimpinan di Universitas Diponegoro maupun Fakultas Sains dan Matematika atas perhatian dan *support* pendanaan yang telah diberikan kepada penulis.

Penulis berharap monograf ini bisa bermanfaat bagi para akademia baik mahasiswa maupun dosen dalam mempelajari ilmu matematika khususnya dalam bidang analisis. Dengan mempelajari monograf ini akan memberikan pengetahuan baru tentang pengembangan pembahasan materi fungsi. Di samping itu monograf ini diharapkan bisa memberikan dasar atau modal untuk pengembangan penelitian bidang matematika analisis.

Akhir kata penulis mengucapkan selamat membaca monograf ini dan semoga bermanfaat. Monograf ini masih belum sempurna oleh karena itu penulis berharap saran, kritik dan masukan dari para pembaca.

Semarang, Januari 2022

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Fungsi bervariasi terbatas atau *bounded variation function* yang biasa disebut fungsi BV pertama kali diperkenalkan oleh Camille Jordan pada tahun 1881, dalam papernya yang membahas konvergensi pada deret Fourier, berjudul "*Sur laserie de Fourier*". Dalam paper tersebut dibahas fungsi bervariasi terbatas untuk satu variabel.

Dalam perkembangan selanjutnya, penelitian fungsi bervariasi terbatas satu variabel dikembangkan ke penelitian fungsi bervariasi terbatas untuk dua variabel, di antaranya adalah Clarkson dan Adams yang telah membahas tujuh definisi dari generalisasi fungsi bervariasi terbatas untuk dua variabel. Dari definisi tersebut terdapat dua definisi yang relevan dengan tujuan yang akan dibahas yaitu Vitali, Lebesgue, Frechet, de la Valle Poussin, dan Hardy Krause. Dua definisi tersebut dikenal dengan variasi Vitali dan variasi Hardy-Krause, konsep tersebut sebelumnya dibahas oleh Owen. Adams dan Clarkson juga membahas sifat dari fungsi bervariasi terbatas untuk dua variabel. Selain itu, Azocar, dkk juga membahas ruang fungsi bervariasi terbatas dua variabel dengan domain persegi pada ruang $\mathbb{R}^2$. Pada tahun 1994, Dariusz Idczak juga mempelajari tentang fungsi bervariasi terbatas untuk beberapa variabel dan differensiabilitasnya. Penelitian ini dibahas pada ruang $\mathbb{R}^2$ dengan domain fungsi interval $[0,1] \times [0,1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$.Dengan demikian penelitian sebelumnya domainnya tertentu, sehingga memungkinkan penelitian lanjutan dengan domain yang lebih umum.

Berdasarkan uraian diatas, peneliti tertarik untuk meneliti apakah beberapa sifat yang berlaku pada fungsi bervariasi terbatas satu variabel juga berlaku pada fungsi bervariasi terbatas untuk dua variabel. Di samping itu dalam proses penelitian ini penulis juga mempelajari dan melengkapi bukti sifat-sifat yang sudah ada dari fungsi bervariasi terbatas untuk dua variabel, serta menerapkannya dengan memberikan contoh yang relevan.

1.2. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang maka permasalahan utama yang diteliti adalah menyelidiki apakah sifat-sifat yang berlaku pada fungsi bervariasi terbatas satu variabel juga berlaku pada fungsi bervariasi terbatas dua variabel. Selain itu juga diselidiki hubungan fungsi bervariasi terbatas dua variabel dengan sifat fungsi terbatas dan fungsi monoton.

1.3. Pembatasan Masalah

Domain fungsi bervariasi terbatas dua variabel kemungkinannya banyak sekali. Domain fungsi ini merupakan suatu himpunan bagian dari ruang Euclid. Secara geometris kemungkinan domainnya bisa beraneka macam baik beraturan maupun tidak. Di antaranya yang beraturan yakni berupa persegi, persegi panjang, lingkaran atau bentuk-bentuk geometris sederhana lainnya yang sudah kita kenal. Oleh karena itu dalam penelitian ini dilakukan pembatasan permasalahan yakni hanya membahas fungsi bervariasi terbatas untuk dua variabel dengan domain daerah persegi panjang tak kosong yang merupakan himpunan bagian dari ruang $\mathbb{R}^2$.

1.4. Tujuan Penelitian

Penelitian ini secara umum bertujuan untuk mengembangkan kajian penelitian bidang analisis khususnya tentang fungsi. Selain itu dengan memperhatikan perumusan permasalahan yang akan dibahas, maka tujuan secara khusus penelitian ini ada beberapa yaitu

1. Mempelajari dan mengkaji fungsi bervariasi terbatas untuk dua variabel dengan domain sembarang daerah persegi panjang pada ruang $\mathbb{R}^2$.
2. Menyelidiki dan membuktikan sejauh mana sifat-sifat dari fungsi bervariasi terbatas satu variabel berlaku untuk fungsi variasi terbatas dua variabel dengan domain sembarang daerah persegi panjang pada ruang $\mathbb{R}^2$.

3. Mencari hubungan fungsi bervariasi terbatas dua variabel dengan fungsi terbatas dan fungsi monoton.

1.5. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam menyusun penelitian ini adalah metode studi pustaka (*study literature*), yaitu dengan memahami jurnal buku, jurnal, serta pustaka-pustaka lain yang menjadi dasar dan materi terkait mengenai definisi dan sifat-sifat dari fungsi bervariasi terbatas pada ruang $\mathbb{R}^2$.

1.6. Kebaruan Penelitian

Pada penelitian ini dibahas mengenai sifat- sifat dari fungsi bervariasi terbatas dua variabel yaitu hubungannya dengan fungsi terbatas, fungsi monoton, dan beberapa teorema lain yang sebelumnya belum pernah dibuktikan. Di sini juga akan dibuktikan mengenai sifat aljabar dari fungsi bervariasi terbatas dua variabel.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Materi dasar yang digunakan untuk menunjang penelitian ini adalah supremum dan infimum, fungsi bervariasi terbatas pada domain interval riil.

2.1. Supremum dan Infimum

Sebelum membahas mengenai supremum dan infimum terlebih dahulu dibahas mengenai konsep batas atas, batas bawah, dan himpunan terbatas pada bilangan riil.

Definisi 2.1.1

(R.G. Bartle, dan D.R. Sherbert. 2011) *Diberikan himpunan tak kosong* $S \subseteq \mathbb{R}$.

a. *Himpunan* $S \subseteq \mathbb{R}$ *dikatakan terbatas ke atas jika terdapat* $u \in \mathbb{R}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $s \in S$, *berlaku* $s \leq u$. *Bilangan* u *tersebut disebut batas atas dari* S.
b. *Himpunan* $S \subseteq \mathbb{R}$ *dikatakan terbatas ke bawah jika terdapat* $w \in \mathbb{R}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $s \in S$, *berlaku* $w \leq s$. *Bilangan* w *tersebut disebut batas bawah dari* S.
c. *Suatu himpunan disebut himpunan terbatas jika himpunan tersebut terbatas ke atas dan terbatas ke bawah.*

Contoh 2.1.1

Himpunan $S = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 6\}$ merupakan himpunan yang terbatas. Himpunan S terbatas keatas, karena terdapat $u = 6 \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, $x \leq 6$. Jadi 6 merupakan batas atas S. Himpunan S terbatas ke bawah yaitu terdapat $w = 1 \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$. Jadi, 1 merupakan batas bawah S. Oleh karena himpunan S terbatas keatas dan terbatas kebawah maka terbukti himpunan S merupakan himpunan terbatas.

Setelah memahami definisi himpunan terbatas, selanjutnya dipelajari mengenai definisi dari supremum dan infimum.

Definisi 2.1.2

(R.G. Bartle, dan D.R. Sherbert. 2011) *Diberikan himpunan tak kosong* $S \subseteq \mathbb{R}$.

a. *Jika* S *terbatas ke atas, maka* $u \in \mathbb{R}$ *disebut supremum dari* S *jika memenuhi*
   1. u *merupakan batas atas dari* S,
   2. *Jika* v *batas atas dari* S *maka* $u \leq v$.
b. *Jika* S *terbatas ke bawah maka* $w \in \mathbb{R}$ *disebut infimum dari* S *jika memenuhi*
   1. w *merupakan batas bawah dari* S,
   2. *Jika* t *batas bawah dari* S *maka* $t \leq w$.

Supremum dan infimum dari suatu himpunan S subset dari $\mathbb{R}$ adalah tunggal. Sedangkan batas atas dan batas bawah dari himpunan S subset dari $\mathbb{R}$ lebih dari satu.

Contoh 2.1.2

Diberikan himpunan $A = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$, akan ditunjukkan bahwa $\sup(A) = \frac{1}{2}$ dan $\inf(A) = 0$. Himpunan A dapat ditulis sebagai $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$.

a. Menentukan $\sup(A) = \frac{1}{2}$. Terlihat bahwa $\frac{1}{2}$ merupakan batas atas dari A, misalkan $v > 0$ merupakan batas atas lain dari A. Harus ditunjukkan bahwa $\frac{1}{2} \leq v$. Dengan kontradiksi, andaikan $v < \frac{1}{2}$. Artinya, $\frac{1}{n+1} \leq v$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tetapi, apabila diambil $n = 1$, diperoleh $\frac{1}{2} \leq v$. Hal ini menunjukkan bahwa $\frac{1}{2}$ merupakan batas atas terkecil dari A atau ditulis dengan $\sup(A) = \frac{1}{2}$.

b. Menentukan $\inf(A) = 0$. Untuk sebarang $x \in \mathbb{N}$, berlaku $x > 0$. Andaikan w merupakan batas bawah dari A yang nilainya lebih besar dari 0, dapat ditulis sebagai $w > 0$ sedemikian hingga $\frac{1}{w} > 0$. Menurut sifat Archimedian, terdapat bilangan asli k sedemikian hingga $\frac{1}{w} < k \Rightarrow \frac{1}{k} < w$. Karena $k \in \mathbb{N}$, maka $\frac{1}{k} \in A$. Untuk $k > 0$ berakibatnya, $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} < w$. Hal ini berarti w bukan batas bawah A karena tidak memenuhi definisi batas bawah. Dengan kata lain $\inf(A) = 0$.

Supremum dari himpunan dapat dinyatakan dengan $\varepsilon > 0$ yaitu sebagai berikut.

Lemma 2.1.3

(R.G. Bartle, dan D.R. Sherbert. 2011) *Sebuah batas atas u merupakan* $\sup S$ *jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s \in S$ sedemikian hingga $u - \varepsilon < s$.*

Bukti dari Lemma 2.1.3 dapat dilihat di Bartle (R.G. Bartle, dan D.R. Sherbert. 2011).

Pernyataan berikut menunjukkan eksistensi dari supremum yang disebut dengan aksioma kelengkapan bilangan riil.

Aksioma 2.1.4

(R.G. Bartle, dan D.R. Sherbert. 2011) **(Aksioma kelengkapan Bilangan Riil)** *Setiap himpunan tidak kosong bilangan riil yang mempunyai batas atas juga mempunyai supremum pada $\mathbb{R}$.*

2.2. Fungsi Bervariasi Terbatas

Pada subbab ini dijelaskan mengenai fungsi bervariasi terbatas pada domain interval riil. Sebelum membahas fungsi bervariasi terbatas terlebih dahulu dibahas mengenai fungsi terbatas.

Definisi 2.2.1

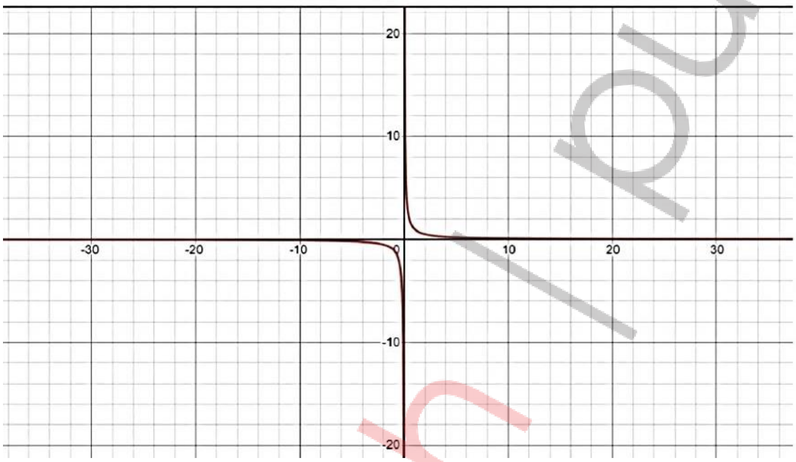
(R.G. Bartle, dan D.R. Sherbert. 2011) *Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$, sebuah fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ dikatakan terbatas pada A jika terdapat konstanta $M > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A$.*

Contoh 2.2.1

a. Diberikan fungsi $f(x) = x^2 + 2$, jika fungsi f didefinisikan pada interval $[1,3]$, maka fungsi $f(x)$ terbatas, karena dapat diambil $M = 12 > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| < 12 = M$.

b. Fungsi sin: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi terbatas, karena $|\sin(x)| \leq 1$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

c. Fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dengan $f(x) = \frac{1}{x}$ merupakan fungsi tak terbatas lihat gambar dibawah ini.

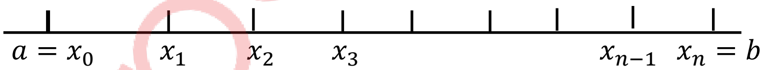


Gambar II.1.1 Fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$.

Partisi dari suatu interval didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.2

(R.G. Bartle, dan D.R. Sherbert. 2011) *Partisi dari suatu interval* $[a, b]$ *merupakan himpunan dari titik-titik* $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ *dengan* $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.



Gambar 2.1.2 Partisi dari interval $[a, b]$

Contoh 2.2.2

Diberikan interval [0,1], partisi dari interval tersebut adalah

a. $P_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$,

b. $P_1 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$,

c. $P_1 = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1\right\}$.

Dari definisi diatas kemudian dapat didefinisikan variasi fungsi dan fungsi bervariasi terbatas.

Definisi 2.2.3

(R. A. Gordon. 1994) *Diberikan fungsi* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *dan* $[c, d] \subseteq [a, b]$. *Variasi dari fungsi* f *pada* $[c, d]$ *dinotasikan dengan* $V(f, [c, d])$ *dan didefinisikan sebagai berikut*

$$V(f, [c, d]) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| |x_i: 1 \leq i \leq n \text{ partisi pada } [c, d]\right\}.$$

Supremum diambil dari semua partisi yang mungkin pada $[c, d]$. *Fungsi* f *dikatakan bervariasi terbatas jika* $V(f, [c, d]) < \infty$.

Sebelum membahas contoh dari fungsi bervariasi terbatas terlebih dahulu dipahami mengenai definisi dari fungsi monoton.

Definisi 2.2.4

(R.G. Bartle, dan D.R. Sherbert. 2011) *Suatu fungsi dikatakan monoton naik jika untuk setiap* x *dan* y *dengan* $x \leq y$ *sedemikian hingga* $f(x) \leq f(y)$, *dan suatu fungsi dikatakan monoton turun jika untuk setiap* x *dan* y *dengan* $x \leq y$ *sedemikian hingga* $f(x) \geq f(y)$.

Contoh 2.2.3

Diberikan $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan $f(x) = x$, untuk $x \in [0,1]$, akan ditunjukan fungsi f bervariasi terbatas pada [0,1].

Diambil sebarang partisi $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ yaitu $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$, oleh karena $x_{i-1} < x_i$ untuk $i = 1,2, \dots, n$ dan f fungsi monoton naik maka $f(x_{i-1}) < f(x_i)$, sehingga

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) > 0$$
$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

sedemikian hingga berlaku

$$\begin{aligned}
&V(f,[0,1]) \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \,|x_i: 1 \le i \le n \text{ partisi pada } [0,1]\right\} \\
&= \sup\{|f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|\} \\
&= \sup\{f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})\} \\
&= \sup\{f(x_n) - f(x_0)\} \\
&= \sup\{f(1) - f(0)\} \\
&= \sup\{1 - 0\} = 1.
\end{aligned}$$

Contoh 2.2.4

Diberikan fungsi sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x\cos\dfrac{\pi}{zx}, & x \in (0,1) \end{cases}$$

Fungsi tersebut bukan merupakan fungsi bervariasi terbatas.

Diambil sebarang partisi $P = \left\{\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right] \middle| i = 1,2,\dots,n\right\}$, variasi dari fungsi tersebut adalah

$$\begin{aligned}
V(f,[0,1]) &= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \left|f\left(\frac{1}{2n-1}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right|\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-1)\pi - \left(\frac{1}{2n}\right)\cos(2n)\pi\right|\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{1}{2n-1}\right)(-1) - \left(\frac{1}{2n}\right)(1)\right|\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n}\right)\right|\right\}
\end{aligned}$$

Untuk menunjukkan barisan tersebut terbatas, maka akan ditunjukkan jika barisan tersebut konvergen, dengan menggunakan uji banding deret lain diperoleh.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n-1} > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$$

Oleh karena barisan $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$ divergen, maka barisan $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n-1}$ merupakan barisan divergen, sehingga $\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n}\right)\right]$ merupakan barisan divergen. Dengan kata lain, barisan tersebut tak terbatas, maka dapat disimpulkan $V(f,[0,1]) = \infty$. Sehingga, fungsi tersebut merupakan fungsi tak terbatas.

Teorema 2.2.5

(R. A. Gordon. 1994) *Diberikan fungsi* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *bervariasi terbatas pada* $[a,b]$, *maka* f *terbatas pada* $[a,b]$.

Bukti:

Diketahui f bervariasi terbatas pada $[a,b]$, yaitu

$$V(f,[a,b]) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \infty.$$

Akan dibuktikan f terbatas pada $[a,b]$, diambil sebarang $x \in [a,b]$, sedemikian hingga

$$|f(x)| - |f(a)| \leq |f(x) - f(a)| \leq V(f,[a,x]) \leq V(f,[a,b])$$

Dari pertidaksamaan diatas didapat

$$|f(x)| - |f(a)| \leq V(f,[a,b])$$
$$|f(x)| \leq |f(a)| + V(f,[a,b])$$

Oleh karena diketahui $V(f,[a,b]) < \infty$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $|f(x)| < \infty$. Jadi fungsi f terbatas pada $[a,b]$. ■

Teorema 2.2.5 tidak berlaku sebaliknya, yaitu jika f fungsi terbatas belum tentu f bervariasi terbatas.

Contoh 2.2.5

Diberikan contoh fungsi trigonometri sebagai berikut, diberikan suatu fungsi trigonometri

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\in(0,1)\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Akan ditunjukkan $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ merupakan fungsi terbatas oleh karena $|\sin(\theta)|\leq 1$ untuk setiap $\theta\in\mathbb{R}$ maka $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ terbatas. Selanjutnya akan ditunjukkan jika f bukan merupakan fungsi bervariasi terbatas.

Diambil sebarang partisi $P=\left\{0,\frac{2}{(2i+1)\pi},\frac{2}{(2i-1)\pi},\dots,\frac{2}{3\pi},\frac{2}{\pi},1\right\}$, maka variasi dari fungsi tersebut adalah

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n}\left|f\left(\frac{2}{(2i-1)\pi}\right)-f\left(\frac{2}{(2i+1)\pi}\right)\right|\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{2}\right)\right|\\ &= \sum_{i=1}^{n}|(-1)-(1)|\\ &= \sum_{i=1}^{n}|(-1)-(1)|\\ &= \sum_{i=1}^{n}|2|\\ &\geq 2n\end{aligned}$$

Untuk nilai n yang semakin besar maka

$$V(f,[0,1])=\sup\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\infty.$$

Oleh karena diperoleh $V(f,[0,1])=\infty$, maka fungsi $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ merupakan fungsi tak terbatas.

Teorema 2.2.6

(R.A. Gordon. 1994)

a. *Jika f fungsi monoton naik pada $[a,b]$, maka f bervariasi terbatas pada $[a,b]$ dan $V(f,[a,b]) = f(b) - f(a)$.*

b. *Jika f fungsi monoton turun pada $[a,b]$, maka f bervariasi terbatas pada $[a,b]$ dan $V(f,[a,b]) = f(a) - f(b)$.*

Bukti.

a. Diambil sebarang partisi $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ pada $[a,b]$ dengan $x_{i-1} < x_i$. Jika $x_0 = a$, dan $x_n = b$, maka diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$
$$= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|.$$

Oleh karena $x_{i-1} < x_i$ untuk $i = 1,2,\dots,n$ dan f monoton naik, maka $f(x_{i-1}) < f(x_i)$ untuk $i = 1,2,\dots,n$. Sehingga,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) > 0$$
$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

Karena f monoton naik pada $[a,b]$ dan $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, maka

$$\begin{aligned} V(f,[a,b]) &= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\right\} \\ &= |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(b) - f(x_{n-1})| \\ &= f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(b) - f(x_{n-1}) \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Didapat, $V(f,[a,b]) = f(b) - f(a) < \infty$, sehingga disimpulkan bahwa f bervariasi terbatas pada $[a,b]$.

b. Diambil sebarang partisi $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ pada $[a,b]$ dengan $x_{i-1} < x_i$. Jika $x_0 = a$, dan $x_n = b$, maka diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$
$$= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|.$$

Oleh karena $x_{i-1} < x_i$ untuk $i = 1,2, \dots, n$ dan f monoton turun, maka $f(x_{i-1}) > f(x_i)$ untuk $i = 1,2, \dots, n$. Sehingga,

$$f(x_{i-1}) - f(x_i) > 0$$
$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = f(x_{i-1}) - f(x_i)$$

Karena f monoton turun pada $[a, b]$ dan $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, maka

$$\begin{aligned} V(f,[a,b]) &= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\right\} \\ &= |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(b) - f(x_{n-1})| \\ &= |f(a) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \cdots + |f(x_{n-1}) - f(b)| \\ &= f(a) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) - f(b) \\ &= f(a) - f(b). \end{aligned}$$

Didapat, $V(f,[a,b]) = f(a) - f(b) < \infty$, sehingga disimpulkan bahwa f bervariasi terbatas pada $[a, b]$. ■

Selanjutnya, akan dijelaskan mengenai fungsi bervariasi terbatas pada setiap subinterval dari fungsi bervariasi terbatas dan nilai variasinya merupakan jumlahan dari variasi setiap subinetrvalnya.

Teorema 2.2.7

(J.H. Dshalalow. 2001) *Diberikan fungsi* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, *dan misalkan* $c \in (a, b)$. *Jika* f *bervariasi terbatas pada* $[a, c]$ *dan* $[c, b]$, *maka* f *bervariasi terbatas pada* $[a, b]$ *dan*

$$V(f,[a,b]) = V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]).$$

Bukti.

Diambil sebarang partisi $P = \{x_i : 1 \le i \le n\}$ pada $[a, b]$. Misalkan $c \in (a, b)$ dan $x_{k-1} < c < x_k$, untuk suatu $k \in \{1,2, \dots, n\}$ sehingga

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_k) - f(c) + f(c) - f(x_{k-1})|$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Karena $x_{k-1} < c < x_k$, sehingga

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_{k-1})| + |f(c) - f(x_k)|$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Karena partisi $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, c\}$ terletak pada interval $[a, c]$ dan partisi $\{c, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ terletak pada interval $[c, b]$, maka

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_{k-1})| + |f(c) - f(x_k)|$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$\leq V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]).$$

Maka, untuk setiap partisi $P = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ pada $[a, b]$ memenuhi

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Dengan definisi variasi,

$$V(f, [a, b]) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\}$$

$$\leq V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]).$$

Selanjutnya, ditunjukkan $V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]) \leq V(f, [a, b])$. Diambil sebarang partisi $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ pada $[a, c]$ dan partisi $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ pada $[c, b]$, maka untuk memenuhi $P_1 \cup P_2 = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_k = y_0 = c, y_1, \dots, y_m = b\}$ dengan $x_k = y_0 = c$.

Sehingga, $P_1 \cup P_2 = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_k = y_0 = c, y_1, \dots, y_m = b\}$ merupakan partisi pada $[a, b]$ dan berlaku

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{m} |f(y_i) - f(y_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{k+m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq V(f, [a, b]).\end{aligned}$$

Karena untuk setiap partisi $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ pada $[a, c]$ dan partisi $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ pada $[c, b]$ memenuhi

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{m} |f(y_i) - f(y_{i-1})| \leq V(f, [a, b]).$$

maka berlaku

$$V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]) \leq V(f, [a, b]).$$

Sehingga diperoleh,

$$V(f, [a, b]) = V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]).$$

Karena $V(f, [a, c]) < \infty$ dan $V(f, [c, b]) < \infty$, maka $V(f, [a, b]) = V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]) < \infty$, sehingga f bervariasi terbatas pada $[a, b]$. ■

Contoh 2.2.6

Didefinisikan fungsi $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^3 - x$ pada interval $[-1,1]$. Fungsi tersebut merupakan sebuah fungsi naik dan fungsi turun dengan variasi terbatas. Berdasarkan teorema 2.2.6 diperoleh

$$V(f, [-1,1]) = V\left(f, \left[-1, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right]\right) + V\left(f, \left[-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right]\right) + V\left(f, \left[\frac{1}{3}\sqrt{3}, 1\right]\right).$$

Dengan menggunakan teorema 2.2.5, $f(x)$ pada $\left[-1, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right]$ merupakan fungsi monoton naik, sehingga

$$V\left(f, \left[-1, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right]\right) = f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) - f(-1)$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{3} - 0 = \frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

Sedangkan $f(x)$ pada $\left[-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right]$ merupakan fungsi monoton turun, sehingga

$$V\left(f, \left[-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right]\right) = f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$$
$$= \frac{2}{9}\sqrt{3} - \left(-\frac{2}{9}\sqrt{3}\right) = \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

Sedangkan $f(x)$ pada $\left[\frac{1}{3}\sqrt{3}, 1\right]$ merupakan fungsi monoton naik, sehingga

$$V\left(f, \left[\frac{1}{3}\sqrt{3}, 1\right]\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$$
$$= 0 - \left(-\frac{2}{9}\sqrt{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

Karena pada interval $\left[-1, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right]$ dan $\left[\frac{1}{3}\sqrt{3}, 1\right]$ fungsi tersebut merupakan fungsi monoton naik dan pada interval $\left[-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right]$ fungsi tersebut merupakan fungsi monoton turun sehingga diperoleh

$$V(f, [-1,1]) = V\left(f, \left[-1, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right]\right) + V\left(f, \left[-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right]\right)$$
$$+V\left(f, \left[\frac{1}{3}\sqrt{3}, 1\right]\right)$$
$$= \frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{4}{9}\sqrt{3} + \frac{2}{9}\sqrt{3} = \frac{8}{9}\sqrt{3}.$$

Diperoleh, $V(f, [-1,1]) = \frac{8}{9}\sqrt{3} < \infty$, sehingga f bervariasi terbatas.

Contoh 2.2.7
Diberikan fungsi $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, dengan

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x \sin \frac{\pi}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Fungsi tersebut merupakan fungsi kontinu tetapi tidak bervariasi terbatas.

Bukti:
Untuk n genap, diambil sebarang $k \in \mathbb{N}$ dengan partisi

$$\left\{x_0 = 0, \dots, x_{n-2k} = \frac{2}{2k+3}, x_{n-(2k+1)} = \frac{1}{k+3}, x_n = 1\right\}.$$

Sehingga diperoleh

$$V(f,[0,1]) \geq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$
$$\geq \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |f(x_{2i+1}) - f(x_{2i})|.$$

Interval yang tersisa adalah $\left[\frac{1}{k+3}, \frac{2}{2k+3}\right]$. Diperoleh

$$\left|f\left(\frac{2}{2k+3}\right)\right| = \left|\sqrt[3]{\frac{2}{2k+3}} \sin\left(\frac{\pi(2k+3)}{2}\right)\right| = \sqrt[3]{\frac{2}{2k+3}},$$

Dan

$$f\left(\frac{1}{k+3}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{k+3}} \sin\big(\pi(k+3)\big) = 0.$$

Suatu fungsi dikatakan monoton naik pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $f'(x) \geq 0$, untuk setiap $x \in [a,b]$. Suatu fungsi dikatakan monoton turun pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $f'(x) \leq 0$, untuk setiap $x \in [a,b]$. Fungsi $f(x) = \sqrt[3]{x} \sin\frac{\pi}{x}$ mempunyai turunan

$$f'(x) = \frac{x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - 3\pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{3x^{\frac{5}{3}}}.$$

Untuk setiap $x \in [0,1]$, terdapat $f'(x)$ yang bernilai negatif dan bernilai positif. Sehingga pada $[0,1]$ fungsi $f(x)$ tidak dapat disebut fungsi monoton naik maupun monoton turun.

Fungsi f pada $\left[\frac{1}{k+3}, \frac{2}{2k+3}\right]$ merupakan fungsi monoton, sehingga

$$
\begin{aligned}
V(f,[0,1]) \geq & \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |f(x_{2i}) - f(x_{2i-1})| \\
= & \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{1}{k+3}\right) - f\left(\frac{2}{2k+3}\right) \right| \\
= & \sum_{k=1}^{n} \left| 0 - \sqrt[3]{\frac{2}{2k+3}} \right| \\
= & \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2k+3}}.
\end{aligned}
$$

Mengingat bahwa setiap suku lebih kecil dari suku sebelumnya, maka

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2k+3}} > & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k+3}} \\
= & \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{k+2}} \\
> & \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}.
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan uji banding dengan deret lain, diperoleh barisan tersebut merupakan barisan divergen. Terdapat barisan

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} < \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{k}},$$

Karena barisan $\frac{1}{k}$ divergen untuk $k \in \mathbb{N}$, maka barisan $\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ divergen untuk $k \in \mathbb{N}$.

Untuk n ganjil, diambil sebarang $k \in \mathbb{N}$ dengan partisi

$$\left\{x_0 = 0, \dots, x_{n-2k} = \frac{2}{2k+3}, x_{n-(2k+1)} = \frac{1}{k+3}, x_n = 1\right\}.$$

Sehingga diperoleh

$$V(f,[0,1]) \geq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{n+1}) - f(x_n)|$$

$$\geq \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |f(x_{2i+1}) - f(x_{2i})| + |f(x_{n+1}) - f(x_n)|.$$

Berdasarkan uraian sebelumnya, diperoleh

$$V(f,[0,1]) \geq \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |f(x_{2i+1}) - f(x_{2i})| + |f(x_{n+1}) - f(x_n)|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2k+3}} + |f(x_{n+1}) - f(x_n)|$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} + |f(x_{n+1}) - f(x_n)|.$$

Barisan tersebut juga merupakan barisan divergen.

Karena untuk partisi dengan jumlah genap maupun ganjil diperoleh barisan yang divergen, maka $V(f,[0,1]) = \infty$ dan f tidak bervariasi terbatas meskipun f kontinu.

BAB III

HASIL PENELITIAN

Hasil dari penelitian ini meliputi definisi fungsi bervariasi terbatas dua variabel, teorema, dan contoh dari fungsi bervariasi terbatas untuk dua variabel.

Sebelum membahas definisi dari fungsi bervariasi terbatas terlebih dahulu akan dipahami definisi tentang partisi pada ruang $\mathbb{R}^2$. Diambil sebarang persegi $I_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} = I \times J$ subset dari ruang $\mathbb{R}^2$ di mana $I = [x_1, x_2]$ dan $J = [y_1, y_2]$ interval pada $\mathbb{R}$ dengan $x_1 < x_2$ dan $y_1 < y_2$, dan $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1), \boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$ vektor di $\mathbb{R}^2$. Partisi dari persegi $I_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$ adalah

$$Q = \{[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] | i = 1,2, \dots, m \text{ dan } j = 1,2, \dots, n\},$$

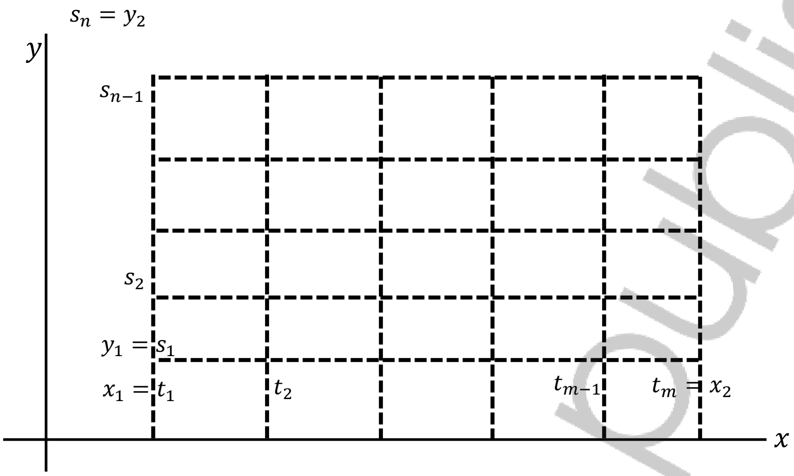
dengan $\{t_i | i = 1,2, \dots m\}$ partisi pada interval I, dan $\{s_j | j = 1,2, \dots, n\}$ partisi pada interval J.

Misalkan $P(I)$ menyatakan koleksi semua partisi pada I, maka $\{t_i | i = 1,2, \dots m\} \in P(I)$, $P(J)$ menyatakan koleksi semua partisi pada J, maka $\{s_j | j = 1,2, \dots, n\} \in P(J)$.

Jika didefinisikan fungsi $f: I_a^b \to \mathbb{R}$, maka berlaku sifat berikut

$$\begin{aligned}
\Delta_{10} f(t_{i+1}, s_{j+1}) &= f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_i, s_{j+1}), \\
\Delta_{01} f(t_{i+1}, s_{j+1}) &= f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j), \\
\Delta_{11} f(t_{i+1}, s_{j+1}) &= \big(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\big) \\
&\quad - \big(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\big).
\end{aligned}$$

Partisi pada ruang $\mathbb{R}^2$ dapat diilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 3.1.1 Partisi persegi $I_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$

Dari definisi partisi pada ruang $\mathbb{R}^2$ diatas selanjutnya dapat didefinisikan mengenai variasi fungsi dan fungsi bervariasi terbatas pada ruang $\mathbb{R}^2$.

Definisi 3.1.1

(J. A. Clarkson dan C. R. Adams. 1933) *Diberikan fungsi* $f: I_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \to \mathbb{R}$, *dan* $y \in J$ *tetap, maka variasi Jordan dari fungsi* $f(.,y): I \to \mathbb{R}$ *didefinisikan dengan*

$$V_I\big(f(.,y)\big) = \sup_{P(I)} \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)|,$$

Supremum diambil dari semua partisi $P(I) = \{t_i | i = 1,2,\dots,m\}$ *pada* I, *dan Untuk setiap* $x \in I$ *tetap, maka variasi Jordan dari fungsi* $f(x,.): J \to \mathbb{R}$ *dinotasikan dengan*

$$V_J\big(f(x,.)\big) = \sup_{P(J)} \sum_{j=1}^{n-1} \big|\Delta_{01} f\big(x, s_{j+1}\big)\big|,$$

Supremum diambil dari semua partisi $P(J) = \{s_j | j = 1,2, \dots, n\}$ *pada* J, *dan Variasi fungsi* f *pada persegi* I_a^b, *didefinisikan dengan*

$$V_{I_a^b}(f) = \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} |\Delta_{11} f(t_{i+1}, s_{j+1})|.$$

Di mana supremum diambil dari semua partisi $Q = \{[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ *pada* I_a^b.

Sehingga variasi total dari fungsi f *didefinisikan dengan*

$$TV(f, I_a^b) = V_I(f(.,y)) + V_J(f(x,.)) + V_{I_a^b}(f).$$

Fungsi f *dikatakan bervariasi terbatas jika variasi total dari fungsi* f *terbatas, yaitu*

$$TV(f, I_a^b) < \infty.$$

Himpunan semua fungsi bervariasi terbatas pada I_a^b *dinotasikan dengan* $BV(I_a^b)$.

Untuk memahami definisi 3.1.1 berikut diberikan contoh mengenai fungsi bervariasi terbatas pada ruang $\mathbb{R}^2$.

Contoh 3.1.1

Diberikan fungsi $f: I_a^b = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, didefinisikan fungsi $f(t,s) = -5t + 9s^2 + 7$. Akan dibuktikan bahwa fungsi f merupakan fungsi bervariasi terbatas pada $[0,1] \times [0,1]$.

Diambil sebarang partisi $P(I)$ pada $I = [0,1]$, yaitu $P(I) = \{t_i | i = 1,2, \dots, m\} = \left\{\frac{i}{m} \middle| i = 1,2, \dots, m\right\}$ dan sebarang partisi $P(J)$ pada $J = [0,1]$, yaitu $P(J) = \{s_j | j = 1,2, \dots, n\} = \left\{\frac{j}{n} \middle| j = 1,2, \dots, n\right\}$. Maka partisi dari interval $I_a^b = [0,1] \times [0,1]$ adalah

$$\left\{\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \middle| i = 1, \dots, m \text{ dan } j = 1, \dots n\right\}.$$

Variasi total dari fungsi f adalah

$$TV(f, I_a^b) = V_I(f(.,y)) + V_J(f(x,.)) + V_{I_a^b}(f)$$

a. Pertama dihitung untuk $V_I(f(.,y))$,

$$V_m(f(.,y)) = \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} \left| f\left(\frac{i+1}{m}, y\right) - f\left(\frac{i}{m}, y\right) \right|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} \left| \left(-5\left(\frac{i+1}{m}\right) + 9y^2 + 7\right) - \left(-5\left(\frac{i}{m}\right) + 9y^2 + 7\right) \right|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} 5\left(\frac{i+1-i}{m}\right)$$
$$= 5\left(\frac{m-1}{m}\right).$$

Sehingga,

$$V_I(f(.,y)) = \sup_{m\in\mathbb{N}} V_m(f,(.,y))$$
$$= \sup_{m\in\mathbb{N}} 5\left(\frac{m-1}{m}\right) = 5.$$

b. Untuk $V_J(f(x,.))$,

$$V_n(f(x,.)) = \sum_{j=1}^{n-1} |\Delta_{10} f(x, s_{j+1})|$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} |f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j)|$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left| f\left(x, \frac{j+1}{n}\right) - f\left(x, \frac{j}{n}\right) \right|$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left| \left(-5x + 9\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 + 7\right) - \left(-5x + 9\left(\frac{j}{n}\right)^2 + 7\right) \right|$$
$$= \frac{9}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^2 - j^2$$

$$= \frac{9}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}(2j+1)$$

$$= \frac{9}{n^2}\left(\frac{2(n-1)n}{2} + (n-1)\right)$$

$$= \frac{9(n-1)n}{n^2} + \frac{n-1}{n^2}.$$

Sehingga,

$$V_J(f(x,.)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} V_n(f(x,.))$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{9(n-1)n}{n^2} + \frac{n-1}{n^2}\right) = 9.$$

c. Untuk $V_{I_a^b}(f)$, dengan $I_a^b = [0,1]\times[0,1]$

$$V_{mn}(f) = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{11} f(t_{i+1}, s_{j+1})\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\Big|\big(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\big) - \big(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\big)\Big|$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\left(\left(-5\left(\frac{i+1}{m}\right) + 9\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 + 7\right) - \left(-5\left(\frac{i+1}{m}\right) + 9\left(\frac{j}{n}\right)^2 + 7\right)\right) - \left(\left(-5\left(\frac{i}{m}\right) + 9\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 + 7\right) - \left(-5\left(\frac{i}{m}\right) + 9\left(\frac{j}{n}\right)^2 + 7\right)\right)\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\left(\frac{9}{n^2}\left((j+1)^2 - j^2\right)\right) - \left(\frac{9}{n^2}\left((j+1)^2 - j^2\right)\right)\right|$$

$$= 0.$$

Sehingga,

$$V_{I_a^b}(f) = \sup V_{m,n\in\mathbb{N}}(f) = 0$$

Dari a, b, dan c didapat,

$$\begin{aligned} TV(f, I_a^b) &= V_I(f(.,y)) + V_J(f(x,.)) + V_{I_a^b}(f) \\ &= 5 + 9 + 0 \\ &= 14 < \infty. \end{aligned}$$

Oleh karena diperoleh $TV\left(f, I_a^b\right) = 14 < \infty$, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi f bervariasi terbatas pada $I_a^b = [0,1] \times [0,1]$.

Selanjutnya dibahas mengenai hubungan fungsi bervariasi terbatas dua variabel dengan fungsi terbatas dan setiap sub persegi dari persegi di $\mathbb{R}^2$ merupakan fungsi bervariasi terbatas.

Teorema 3.1.2
Diberikan fungsi $f: I_a^b \to \mathbb{R}$ bervariasi terbatas pada I_a^b, maka f terbatas pada I_a^b.

Bukti.
Diketahui f bervariasi terbatas pada I_a^b, yaitu

$$\begin{aligned} TV(f, I_a^b) &= V_I\left(f(.,y)\right) + V_J\left(f(x,.)\right) + V_{I_a^b}(f) \\ &= M + K + N < \infty. \end{aligned}$$

Akan dibuktikan f terbatas pada I_a^b,

a. Untuk $V_I\left(f(.,y)\right)$, diambil sebarang $t \in I = [x_1, x_2]$, sedemikian hingga

$$\begin{aligned} |f(t,y))| - |f(x_1,y)| \le |f(t,y) - f(x_1,y)| &\le V_{[x_1,t]}\left(f(.,y)\right) \\ &\le V_{[x_1,x_2]}\left(f(.,y)\right), \end{aligned}$$

Dari pertidaksamaan diatas didapat

$$|f(t,y)| - |f(x_1,y)| \le V_{[x_1,x_2]}\left(f(.,y)\right)$$
$$|f(t,y)| \le |f(x_1,y)| + V_{[x_1,x_2]}\left(f(.,y)\right).$$

Oleh karena diketahui $V_I(f(.,y)) = M < \infty$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $|f(t,y)| < \infty$. Jadi fungsi f terbatas pada $[x_1, x_2]$.

b. Untuk $V_J(f(x,.))$, diambil sebarang $s \in J = [y_1, y_2]$, sedemikian hingga

$$|f(x,s)| - |f(x,y_1)| \le |f(x,s) - f(x,y_1)| \le V_{[y_1,t]}(f(x,.)) \le V_{[y_1,y_2]}(f(x,.)),$$

Dari pertidaksamaan diatas didapat

$$|f(x,s)| - |f(x,y_1)| \le V_{[y_1,y_2]}(f(x,.))$$
$$|f(x,s)| \le |f(x,y_1)| + V_{[y_1,y_2]}(f(x,.)).$$

Oleh karena diketahui $V_J(f(x,.)) = K < \infty$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $|f(x,s)| < \infty$. Jadi fungsi f terbatas pada $[y_1, y_2]$.

c. Untuk $V_{I_a^b}(f)$, diambil sebarang $(t,s) \in I_a^b = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, sedemikian hingga

$$\begin{aligned}|(f(t,s) - f(t,y_1))| - |(f(x_1,s) - f(x_1,y_1))| &\le |(f(t,s) - f(t,y_1)) - (f(x_1,s) - f(x_1,y_1))| \\ &\le V_{[x_1,t]\times[y_1,s]}(f) \\ &\le V_{[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]}(f)\end{aligned}$$

Dari pertidaksamaan diatas didapat

$$|(f(t,s) - f(t,y_1))| - |(f(x_1,s) - f(x_1,y_1))| \le V_{[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]}(f)$$
$$|(f(t,s) - f(t,y_1))| \le |(f(x_1,s) - f(x_1,y_1))| + V_{[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]}(f)$$
$$|f(t,s)| \le |f(t,y_1)| + |(f(x_1,s) - f(x_1,y_1))| + V_{[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]}(f)$$

Oleh karena diketahui $V_{I_a^b}(f) = N < \infty$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $|f(t,s)| < \infty$. Jadi fungsi f terbatas pada $I_a^b = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$.

Dari poin a, b dan c dapat disimpulkan bahwa

$$|f(x,y)| = M + K + N < \infty.$$

Untuk setiap $x, y \in I_a^b = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Sehingga diperoleh f terbatas.

Teorema 3.1.2 tidak berlaku sebaliknya, yaitu fungsi terbatas belum tentu merupakan fungsi bervariasi terbatas.

Contoh 3.1.2

Diberikan suatu fungsi trigonometri

$$f(t,s) = \begin{cases} s.\sin\left(\dfrac{1}{t}\right), & (s,t) \neq (0,0) \\ 0, & (s,t) \neq (0,0) \end{cases} \text{ pada } [-1,1] \times [-1,1].$$

Fungsi diatas terbatas pada $[-1,1] \times [-1,1]$ karena $\left|s \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq |s| \cdot 1 \leq |s|$.

Diambil sebarang partisi $P(I)$ pada $I = [-1,1]$, yaitu $P(I) = \{t_i | i = 1,2,\dots,m\} = \left\{\left[\frac{2}{(2i+1)\pi}, \frac{2}{(2i-1)\pi}\right] \middle| i = 1,2,\dots,m\right\}$ dan sebarang partisi $P(J)$ pada $J = [-1,1]$, yaitu $P(J) = \{s_j | j = 1,2,\dots,n\} = \left\{\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \middle| j = 1,2,\dots,n\right\}$. Maka partisi dari interval $I_a^b = [-1,1] \times [-1,1]$ adalah

$$\left\{\left[\frac{2}{(2i+1)\pi}, \frac{2}{(2i-1)\pi}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \middle| i = 1,\dots,m \text{ dan } j = 1,\dots n\right\}.$$

Variasi total dari fungsi f adalah

$$TV(f,[-1,1] \times [-1,1]) = V_{[-1,1]}(f(.,y)) + V_{[-1,1]}(f(x,.)) + V_{[-1,1]\times[-1,1]}(f).$$

a. Untuk $V_{[-1,1]}(f(.,y))$,

$$\begin{aligned} V_m(f(.,y)) &= \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)| \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)| \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \left| f\left(\frac{2}{(2i-1)\pi}, y\right) - f\left(\frac{2}{(2i+1)\pi}, y\right) \right| \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \left| y \sin \frac{(2i-1)\pi}{2} - y \sin \frac{(2i+1)\pi}{2} \right|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} |y(-1) - y(1)|$$
$$= y \sum_{i=1}^{m-1} |(-1) - 1|$$
$$\geq y \cdot 2(m-1)$$

Untuk m yang besar, maka

$V_{[-1,1]}(f(.,y)) = \sup\{V_m(f(.,y))\}$
$V_{[-1,1]}(f(.,y)) = \infty.$

Oleh karena diperoleh $V_{[-1,1]}(f(.,y)) = \infty$, maka $TV(f, [-1,1] \times [-1,1]) = \infty$, sehingga dapat disimpulkan bahwa fungsi f bervariasi terbatas pada $I_a^b = [-1,1] \times [-1,1]$.

Teorema 3.1.3

Jika f bervariasi terbatas pada I_a^b maka f bervariasi terbatas pada setiap sub persegi dari I_a^b.

Bukti.

Asumsikan bahwa f bervariasi terbatas pada $I_a^b = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, jadi

$$TV(f, I_a^b) = V_I(f(.,y)) + V_J(f(x,.)) + V_{I_a^b}(f) = p + q + r.$$

Dengan $p, q, r \in \mathbb{R}$.

a. Diketahui $V_I(f(.,y)) = p$. Misalkan $[c,d]$ sub interval dari $[x_1, x_2]$ dan $\{t_i | i = 1, \dots m\}$ sebarang partisi pada $[c,d]$. Dengan memperpanjang partisi ini pada $[x_1, x_2]$ yaitu dengan menambahkan titik x_1 dan x_2, dan melakukan pelabelan ulang. Jadi $\{t_i | i = 0,1, \dots m, m+1\}$ adalah partisi $[x_1, x_2]$ sedemikian hingga $t_0 = x_1$, $t_1 = c, t_m = d$, $t_{m+1} = x_2$, dan untuk sebarang $y \in [y_1, y_2]$ tetap, diperoleh

$$\sum_{i=1}^{m}|f(t_{i+1},y)-f(t_i,y)| \le |f(t_1,y)-f(x_1,y)| + \sum_{i=2}^{m}|f(t_{i+1},y)-f(t_i,y)| + |f(x_2,y)-f(t_m,y)| \le p.$$

untuk sebarang partisi dari $[c,d]$ dan sebarang $y \in [y_1,y_2]$. $V_{[c,d]}(f(.\,,y)) \le V_I\big(f(.\,,y)\big)$, untuk setiap $y \in [y_1,y_2]$, maka $V_{[c,d]}(f(.\,,y)) \le V_I(f(.\,,y)) \le p$.

b. Diketahui $V_J(f(x,.)) = q$. Misalkan $[e,h]$ sub interval dari $[y_1,y_2]$ dan $\{s_j \big| j = 1,\dots,n\}$ sebarang partisi pada $[e,h]$. Dengan memperpanjang partisi ini pada $[y_1,y_2]$ dengan menambahkan titik y_1 dan y_2, dan melakukan pelabelan ulang. Jadi $\{s_j \big| j = 0,1,\dots,n,n+1\}$ adalah partisi $[y_1,y_2]$ sedemikian hingga $s_0 = y_1, s_1 = e, s_n = h$, $s_{n+1} = y_2$, dan untuk sebarang $x \in [x_1,x_2]$ tetap, diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n}|f(x,s_{j+1})-f(x,s_j)| \le |f(x,s_1)-f(x,y_1)| + \sum_{j=2}^{n}|f(x,s_{j+1})-f(x,s_j)| + |f(x,y_2)-f(x,s_n)| \le q.$$

Untuk sebarang partisi dari $[e,h]$ dan sebarang $x \in [x_1,x_2]$. $V_{[e,f]}(f(x,.)) \le V_J(f(x,.))$, untuk setiap $x \in [x_1,x_2]$, maka $V_{[e,f]}(f(x,.)) \le V_J(f(x,.)) \le q$.

c. Diketahui $V_{I_a^b}(f) = r$. Misalkan $[c,d] \times [e,f]$ adalah sub persegi dari persegi I_a^b dan misalkan

$$\{[t_i,t_{i+1}] \times [s_j,s_{j+1}] \big| i = 1,\dots,m \text{ dan } j = 1,\dots,n\}$$

sebarang partisi pada $[c,d] \times [e,h]$. Maka perluasan partisi untuk I_a^b adalah penambahan titik x_1, x_2, y_1, dan y_2 dan melakukan pelabelan ulang. Jadi,

$$\{[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] | i = 0,1, \dots, m, m+1 \text{ dan } j = 0,1, \dots, n, n+1\}$$

adalah partisi pada I_a^b, sedemikian hingga $t_0 = x_1$, $t_1 = c, t_m = d$, $t_{m+1} = x_2$, dan $s_0 = y_1, s_1 = e, s_n = h$, $s_{n+1} = y_2$. Maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} &\left|f(t_i, s_j) - f(t_i, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j) + f(t_{i+1}, s_{j+1})\right| \\
&\leq |f(x_1, y_1) - f(x_1, s_1) - f(t_1, y_1) + f(t_1, s_1)| \\
&+ \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{n} \left|f(t_i, s_j) - f(t_i, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j) + f(t_{i+1}, s_{j+1})\right| \\
&\qquad + \left|\begin{matrix} f(t_m, s_n) - f(t_m, y_2) \\ -f(x_2, s_n) + f(x_2, y_2) \end{matrix}\right| \\
&\qquad \leq r.
\end{aligned}$$

Untuk sebarang partisi dari $[c,d] \times [e,h]$, didapat $V_{[c,d]\times[e,h]}(f) \leq V_{I_a^b}(f) \leq r$.

Dari poin a, b, dan c didapat

$$\begin{aligned}
TV(f, [c,d] \times [e,h]) &= V_{[c,d]}(f) + V_{[e,h]}(f) + V_{[c,d]\times[e,h]}(f) \\
&\leq p + q + r.
\end{aligned}$$

Sehingga didapat bahwa untuk sebarang partisi pada $[c,d] \times [e,h] \subseteq I_a^b$, diperoleh $TV(f, [c,d] \times [e,h])$ terbatas.

Selanjutnya akan dibahas mengenai sifat aljabar dari fungsi bervariasi terbatas pada I_a^b.

Teorema 3.1.4

Diberikan fungsi $f: I_a^b \to \mathbb{R}$ fungsi bervariasi terbatas, dan misalkan $k > 0$ adalah konstata, maka kf bervariasi terbatas pada I_a^b.

Bukti.

Diketahui f bervariasi terbatas pada I_a^b, artinya $TV(f, I_a^b) < \infty$.

Diambil sebarang partisi $P(I) = \{t_i | i = 1, \dots, m\}$ pada I,
partisi $P(J) = \{s_j | j = 1, \dots, n\}$ pada J,
dan $Q = \{[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] | i = 1,2, \dots, m \text{ dan } j = 1,2, \dots, n\}$ partisi pada I_a^b.
Maka variasi totalnya adalah

$$TV(kf, I_a^b) = V_I(kf(.,y)) + V_J(kf(x,.)) + V_{I_a^b}(kf).$$

a. Untuk $V_I(kf(.,y))$, yaitu

$$V_I(kf(.,y)) = \sup_{P(I)} \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} kf(t_{i+1}, y)|,$$

Maka,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} kf(t_{i+1}, y)| &= \sum_{i=1}^{m-1} |kf(t_{i+1}, y) - kf(t_i, y)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-1} |k||f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)| \\
&\leq |k| \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)| \\
&\leq |k| \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)|.
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
V_I(kf(.,y)) &= \sup_{P(I)} \left(\sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} kf(t_{i+1}, y)| \right) \\
&\leq |k| \sup_{P(I)} \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)| \\
&\leq |k| V_I(f(.,y)).
\end{aligned}$$

b. Untuk $V_J(f(x,.))$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{01}kf(x,s_{j+1})\right| &= \sum_{j=1}^{n-1}\left|kf(x,s_{j+1})-kf(x,s_j)\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{n-1}|k|\left|f(x,s_{j+1})-f(x,s_j)\right| \\ &\le |k|\sum_{j=1}^{n-1}\left|f(x,s_{j+1})-f(x,s_j)\right| \\ &\le |k|\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{01}kf(x,s_{j+1})\right|,\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}V_J(kf(x,.)) &= \sup_{P(J)}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{01}kf(x,s_{j+1})\right|\right) \\ &\le |k|\sup_{P(J)}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{01}f(x,s_{j+1})\right| \\ &\le |k|V(f(x,.)).\end{aligned}$$

c. Untuk $V_{I_a^b}(kf)$, diperoleh

$$\begin{aligned}V_{I_a^b}(kf) &= \sup_{Q}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{11}kf(t_{i+1},s_{j+1})\right| \\ &= \sup_{Q}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\Big|\left(kf(t_{i+1},s_{j+1})-kf(t_{i+1},s_j)\right) \\ &\qquad -\left(kf(t_i,s_{j+1})-kf(t_i,s_j)\right)\Big| \\ &\le \sup_{Q}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}|k|\Big|\left(f(t_{i+1},s_{j+1})-f(t_{i+1},s_j)\right) \\ &\qquad -\left(f(t_i,s_{j+1})-f(t_i,s_j)\right)\Big|\end{aligned}$$

$$\leq |k| \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \Big| \big(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\big) - \big(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\big) \Big|$$

$$\leq |k| \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} |\Delta_{11} k f(t_{i+1}, s_{j+1})|$$

$$\leq |k| V_{I_a^b}(f).$$

Dari a, b, dan c untuk sebarang partisi yang diambil didapat,

$$\begin{aligned} TV(kf, I_a^b) &= V_I(kf(.,y)) + V_J(kf(x,.)) + V_{I_a^b}(kf) \\ &\leq |k| V_I(f(.,y)) + |k| V_J(f(x,.)) + |k| V_{I_a^b}(f) \\ &\leq |k| TV(f, I_a^b). \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Oleh karena fungsi f bervariasi terbatas maka kf juga bervariasi terbatas pada I_a^b, dan selanjutnya didapat $TV(kf, I_a^b) = |k| TV(f, I_a^b)$.

Teorema 3.1.5

Diberikan fungsi $f, g: I_a^b \to \mathbb{R}$ bervariasi terbatas pada I_a^b, maka $f + g$ bervariasi terbatas pada I_a^b.

Bukti.

Diketahui fungsi f dan g bervariasi terbatas pada I_a^b, artinya $TV(f, I_a^b) < \infty$ dan $TV(g, I_a^b) < \infty$. Diambil sebarang partisi $P(I) = \{t_i | i = 1, \ldots, m\}$ pada I, partisi $P(J) = \{s_j | j = 1, \ldots, n\}$ pada J, dan partisi $\{[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] | i = 1, \ldots, m \text{ dan } j = 1, \ldots, n\}$ pada I_a^b. Maka variasi totalnya adalah

$$TV((f+g), I_a^b) = V_I((f+g)(.,y)) + V_J((f+g)(x,.)) + V_{I_a^b}(f+g).$$

a. Untuk $V_I((f+g)(.,y))$, diperoleh

$$\sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10}(f+g)(t_{i+1}, y)| = \sum_{i=1}^{m-1} |(f+g)(t_{i+1}, y) - (f+g)(t_i, y)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) + g(t_{i+1}, y) - f(t_i, y) - g(t_i, y)| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y) + g(t_{i+1}, y) - g(t_i, y)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-1} \{|f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)|\} + \sum_{i=1}^{m-1} \{|g(t_{i+1}, y) - g(t_i, y)|\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)| + \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} g(t_{i+1}, y)|.
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh,

$$
\begin{aligned}
V_I\big((f+g)(.\,, y)\big) &= \sup_{P(I)} \left(\sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)| + \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} g(t_{i+1}, y)| \right) \\
&\leq \sup_{P(I)} \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)| + \sup_{P(I)} \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} g(t_{i+1}, y)| \\
&\leq V_I\big(f(.\,, y)\big) + V_I\big(g(.\,, y)\big).
\end{aligned}
$$

b. Untuk $V_J\big((f+g)(x, .)\big)$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1} |\Delta_{01}(f+g)(x, s_{j+1})| &= \sum_{j=1}^{n-1} |(f+g)(x, s_{j+1}) - (f+g)(x, s_j)| \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} |f(x, s_{j+1}) + g(x, s_{j+1}) - f(x, s_j) - g(x, s_j)| \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} |f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j) + g(x, s_{j+1}) - g(x, s_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n-1} \{|f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j)| + |g(x, s_{j+1}) - g(x, s_j)|\} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n-1} \{|f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j)|\} + \sum_{j=1}^{n-1} \{|g(x, s_{j+1}) - g(x, s_j)|\} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n-1} |\Delta_{01} f(x, s_{j+1})| + \sum_{j=1}^{n-1} |\Delta_{01} g(x, s_{j+1})|.
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
V_J\big((f+g)(x,.)\big) &= \sup_{P(J)}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{01}f(x,s_{j+1})\right| + \sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{01}g(x,s_{j+1})\right|\right)\\
&\le \sup_{P(J)}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{01}f(x,s_{j+1})\right| + \sup_{P(J)}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{01}g(x,s_{j+1})\right|\\
&\le V_J\big(f(x,.)\big) + V_J\big(g(x,.)\big)
\end{aligned}$$

c. Untuk $V_{I_a^b}(f+g)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
V_{I_a^b}(f+g) &= \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{11}(f+g)(t_{i+1},s_{j+1})\right|\\
&= \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\Big|\big((f+g)(t_{i+1},s_{j+1}) - (f+g)(t_{i+1},s_j)\big)\\
&\qquad - \big((f+g)(t_i,s_{j+1}) - (f+g)(t_i,s_j)\big)\Big|\\
&= \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\Big|\big(f(t_{i+1},s_{j+1}) + g(t_{i+1},s_{j+1}) - f(t_{i+1},s_j)\\
&\qquad - g(t_{i+1},s_j)\big)\\
&\qquad - \big(f(t_i,s_{j+1}) - g(t_i,s_{j+1}) - f(t_i,s_j)\\
&\qquad - g(t_i,s_j)\big)\Big|\\
&= \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\big|f(t_{i+1},s_{j+1}) - f(t_{i+1},s_j) - f(t_i,s_{j+1})\\
&\qquad + f(t_i,s_j) + g(t_{i+1},s_{j+1}) - g(t_{i+1},s_j)\\
&\qquad + g(t_i,s_{j+1}) + g(t_i,s_j)\big|\\
&\le \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\{\big|f(t_{i+1},s_{j+1}) - f(t_{i+1},s_j) - f(t_i,s_{j+1})\\
&\qquad + f(t_i,s_j)\big|\\
&\qquad + \big|g(t_{i+1},s_{j+1}) - g(t_{i+1},s_j) + g(t_i,s_{j+1})\\
&\qquad + g(t_i,s_j)\big|\}
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{Q} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \{ |f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j) - f(t_i, s_{j+1}) + f(t_i, s_j)| \} + \sup_{Q} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \{ |g(t_{i+1}, s_{j+1}) - g(t_{i+1}, s_j) + g(t_i, s_{j+1}) + g(t_i, s_j)| \}$$

$$\leq \sup_{Q} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} |\Delta_{11} f(t_{i+1}, s_{j+1})| + \sup_{Q} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} |\Delta_{11} g(t_{i+1}, s_{j+1})|$$

$$\leq V_{I_a^b}(f) + V_{I_a^b}(g).$$

Dari a, b, dan c untuk sebarang partisi yang diambil didapat,

$$\begin{aligned} TV\big((f+g), I_a^b\big) &= V_I\big((f+g)(.,y)\big) + V_J\big((f+g)(x,.)\big) + V_{I_a^b}(f+g) \\ &\leq V_I(f(.,y)) + V_I(g(.,y)) + V_J(f(x,.)) + V_J(g(x,.)) \\ &\quad + V_{I_a^b}(f) + V_{I_a^b}(g) \\ &\leq V_I(f(.,y)) + V_J(f(x,.)) + V_{I_a^b}(f) + V_I(g(.,y)) \\ &\quad + V_J(g(x,.)) + V_{I_a^b}(g) \\ &\leq TV(f, I_a^b) + TV(g, I_a^b) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Untuk sebarang partisi yang diambil diperoleh $TV(f, I_a^b) + TV(g, I_a^b)$ terbatas, sehingga fungsi $f + g$ juga bervariasi terbatas pada I_a^b.

Teorema 3.1.6

Misalkan diberikan fungsi $f, g: I_a^b \to \mathbb{R}$ bervariasi terbatas pada I_a^b maka fungsi fg bervariasi terbatas pada I_a^b.

Bukti.

Diketahui fungsi f dan g bervariasi terbatas pada I_a^b, artinya $TV(f, I_a^b) < \infty$ dan $TV(g, I_a^b) < \infty$. Diambil sebarang partisi $P(I) = \{t_i | i = 1, \dots, m\}$ pada I, partisi $P(J) = \{s_j | j = 1, \dots, n\}$ pada J,

dan $\{[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] | i = 1, \ldots, m$ dan $j = 1, \ldots, n\}$ partisi pada I_a^b.
Akan dibuktikan fungsi fg bervariasi terbatas, maka

$$TV(fg, I_a^b) = V_I(fg(.,y)) + V_J(fg(x,.)) + V_{I_a^b}(fg).$$

a. Untuk $V_I(fg(.,y))$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10}(fg)(t_{i+1}, y)| &= \sum_{i=1}^{m-1} |(fg)(t_{i+1}, y) - (fg)(t_i, y)| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y)g(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)g(t_i, y)| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y)g(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)g(t_{i+1}, y) \\
&\qquad + f(t_i, y)g(t_{i+1}, y) \\
&\qquad - f(t_i, y)g(t_i, y)| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} |[f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)]g(t_{i+1}, y) \\
&\qquad + [g(t_{i+1}, y) - g(t_i, y)]f(t_i, y)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-1} |[f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)]g(t_{i+1}, y)| \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{m-1} |[g(t_{i+1}, y) \\
&\qquad - g(t_i, y)]f(t_i, y)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-1} |g(t_{i+1}, y)||[f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)]| \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_i, y)||[g(t_{i+1}, y) \\
&\qquad - g(t_i, y)]| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-1} M_g|[f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)]| \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{m-1} M_f|[g(t_{i+1}, y) - g(t_i, y)]|
\end{aligned}$$

$$\leq M_g \sum_{i=1}^{m-1} |[f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)]|$$

$$+ M_f \sum_{i=1}^{m-1} |[g(t_{i+1}, y) - g(t_i, y)]|$$

$$\leq M_g \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)| + M_f \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} g(t_{i+1}, y)|.$$

Sehingga diperoleh,

$$V_I\big((fg)(.,y)\big) = \sup_{P(I)} \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10}(fg)(t_{i+1}, y)|$$

$$\leq M_g \sup_{P(I)} \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)| + M_f \sup_{P(I)} \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} g(t_{i+1}, y)|$$

$$\leq M_g V_I\big(f(.,y)\big) + M_f V_I\big(g(.,y)\big)$$

b. Untuk $V_J\big((fg)(x,.)\big)$, diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left|\Delta_{01} fg(x, s_{j+1})\right| = \sum_{j=1}^{n-1} \left|fg(x, s_{j+1}) - fg(x, s_j)\right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left|f(x, s_{j+1}) g(x, s_{j+1}) - f(x, s_j) g(x, s_j)\right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \Big|f(x, s_{j+1}) g(x, s_{j+1}) - f(x, s_j) g(x, s_{j+1})$$

$$+ f(x, s_j) g(x, s_{j+1})$$

$$- f(x, s_j) g(x, s_j)\Big|$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \Big|[f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j)] g(x, s_{j+1})$$

$$+ [g(x, s_{j+1}) - g(x, s_j)] f(x, s_j)\Big|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n-1} \left| \left[f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j) \right] g(x, s_{j+1}) \right|$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \left| \left[g(x, s_{j+1}) \right.\right.$$
$$\left.\left. - g(x, s_j) \right] f(x, s_j) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n-1} \left| g(x, s_{j+1}) \right| \left| \left[f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j) \right] \right|$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \left| f(x, s_j) \right| \left| \left[g(x, s_{j+1}) \right.\right.$$
$$\left.\left. - g(x, s_j) \right] \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n-1} M_g \left| \left[f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j) \right] \right|$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} M_f \left| \left[g(x, s_{j+1}) - g(x, s_j) \right] \right|$$

$$\leq M_g \sum_{j=1}^{n-1} \left| \left[f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j) \right] \right|$$

$$+ M_f \sum_{j=1}^{n-1} \left| \left[g(x, s_{j+1}) - g(x, s_j) \right] \right|$$

$$\leq M_g \sum_{j=1}^{n-1} \left| \Delta_{01} f(x, s_{j+1}) \right| + M_f \sum_{j=1}^{n-1} \left| \Delta_{01} g(x, s_{j+1}) \right|.$$

Sehingga diperoleh,

$$V_J\big((fg)(x,.)\big) = \sup_{P(J)} \sum_{j=1}^{n-1} \left| \Delta_{01}(fg)(x, s_{j+1}) \right|$$

$$\leq \sup_{P(J)} \sum_{j=1}^{n-1} M_g \left| \Delta_{01} f(x, s_{j+1}) \right| + \sup_{P(J)} \sum_{j=1}^{n-1} M_f \left| \Delta_{01} g(x, s_{j+1}) \right|$$

$$\leq M_g \sup_{P(J)} \sum_{j=1}^{n-1} \left| \Delta_{01} f(x, s_{j+1}) \right| + M_f \sup_{P(J)} \sum_{j=1}^{n-1} \left| \Delta_{01} g(x, s_{j+1}) \right|$$

$$\leq M_g V_J\big(f(x,.)\big) + M_f V_J\big(g(x,.)\big).$$

c. Untuk $V_{I_a^b}(fg)$, diperoleh,

$$
\begin{aligned}
V_{I_a^b}(fg) &= \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \left|\Delta_{11} fg(t_{i+1}, s_{j+1})\right| \\
&= \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \Big|\big(fg(t_{i+1}, s_{j+1}) - fg(t_{i+1}, s_j)\big) \\
&\qquad\qquad - \big(fg(t_i, s_{j+1}) - fg(t_i, s_j)\big)\Big| \\
&= \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \Big|f(t_{i+1}, s_{j+1})g(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)g(t_{i+1}, s_j) \\
&\qquad\qquad - \big(f(t_i, s_{j+1})g(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)g(t_i, s_j)\big)\Big| \\
&= \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \Big|f(t_{i+1}, s_{j+1})g(t_{i+1}, s_{j+1}) \\
&\qquad\qquad - f(t_i, s_{j+1})g(t_{i+1}, s_{j+1}) \\
&\qquad\qquad + f(t_i, s_{j+1})g(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)g(t_i, s_j) \\
&\qquad\qquad - f(t_{i+1}, s_j)g(t_{i+1}, s_j) + f(t_i, s_j)g(t_i, s_j) \\
&\qquad\qquad - f(t_i, s_{j+1})g(t_i, s_{j+1}) + f(t_{i+1}, s_j)g(t_i, s_j)\Big| \\
&= \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \Big|f(t_i, s_j)g(t_i, s_j) - f(t_{i+1}, s_j)g(t_i, s_j) \\
&\qquad\qquad + f(t_{i+1}, s_{j+1})g(t_{i+1}, s_{j+1}) \\
&\qquad\qquad - f(t_i, s_{j+1})g(t_{i+1}, s_{j+1}) \\
&\qquad\qquad + f(t_i, s_{j+1})g(t_{i+1}, s_{j+1}) \\
&\qquad\qquad - f(t_i, s_{j+1})g(t_i, s_{j+1}) + f(t_{i+1}, s_j)g(t_i, s_j) \\
&\qquad\qquad - f(t_{i+1}, s_j)g(t_{i+1}, s_j)\Big| \\
&= \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \Big|\big[f(t_i, s_j) - f(t_{i+1}, s_j)\big]g(t_i, s_j) \\
&\qquad\qquad + \big[f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_i, s_{j+1})\big]g(t_{i+1}, s_{j+1}) \\
&\qquad\qquad + \big[g(t_{i+1}, s_{j+1}) - g(t_i, s_{j+1})\big]f(t_i, s_{j+1}) \\
&\qquad\qquad + \big[g(t_i, s_j) - g(t_{i+1}, s_j)\big]f(t_{i+1}, s_j)\Big|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \big|\big[f(t_i,s_j) - f(t_{i+1},s_j)\big]g(t_i,s_j) \\
&\qquad\qquad + \big[f(t_{i+1},s_{j+1}) - f(t_i,s_{j+1})\big]g(t_{i+1},s_{j+1})\big| \\
&\qquad\qquad + \big|\big[g(t_{i+1},s_{j+1}) - g(t_i,s_{j+1})\big]f(t_i,s_{j+1}) \\
&\qquad\qquad + \big[g(t_i,s_j) - g(t_{i+1},s_j)\big]f(t_{i+1},s_j)\big| \\
&\leq \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \big|\big[f(t_i,s_j) - f(t_{i+1},s_j)\big]g(t_i,s_j) \\
&\qquad\qquad + \big[f(t_{i+1},s_{j+1}) - f(t_i,s_{j+1})\big]g(t_{i+1},s_{j+1})\big| \\
&\qquad\qquad + \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \big|\big[g(t_{i+1},s_{j+1}) \\
&\qquad\qquad - g(t_i,s_{j+1})\big]f(t_i,s_{j+1}) \\
&\qquad\qquad + \big[g(t_i,s_j) - g(t_{i+1},s_j)\big]f(t_{i+1},s_j)\big| \\
&\leq \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \big\{\big|f(t_i,s_j) - f(t_{i+1},s_j)\big|\big|g(t_i,s_j)\big| \\
&\qquad\qquad + \big|f(t_{i+1},s_{j+1}) - f(t_i,s_{j+1})\big|\big|g(t_{i+1},s_{j+1})\big|\big\} \\
&\qquad\qquad + \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \big\{\big|g(t_{i+1},s_{j+1}) \\
&\qquad\qquad - g(t_i,s_{j+1})\big|\big|f(t_i,s_{j+1})\big| \\
&\qquad\qquad + \big|g(t_i,s_j) - g(t_{i+1},s_j)\big|\big|f(t_{i+1},s_j)\big|\big\} \\
&\leq \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \big\{\big|f(t_i,s_j) - f(t_{i+1},s_j)\big|M_g \\
&\qquad\qquad + \big|f(t_{i+1},s_{j+1}) - f(t_i,s_{j+1})\big|M_g\big\} \\
&\qquad\qquad + \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \big\{\big|g(t_{i+1},s_{j+1}) - g(t_i,s_{j+1})\big|M_f \\
&\qquad\qquad + \big|g(t_i,s_j) - g(t_{i+1},s_j)\big|M_f\big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M_g \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \{ |f(t_i, s_j) - f(t_{i+1}, s_j)| \\
&\qquad\qquad + |f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_i, s_{j+1})| \} \\
&\qquad\qquad + M_f \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \{ |g(t_{i+1}, s_{j+1}) - g(t_i, s_{j+1})| \\
&\qquad\qquad + |g(t_i, s_j) - g(t_{i+1}, s_j)| \} \\
&\leq M_g \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \{ \Delta_{11} f(t_{i+1}, s_{j+1}) \} \\
&\qquad\qquad + M_f \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \{ \Delta_{11} g(t_{i+1}, s_{j+1}) \} \\
&\leq M_g V_{I_a^b}(f) + M_f V_{I_a^b}(g).
\end{aligned}
$$

Dari a,b, dan c dapat disimpulkan bahwa

$$
\begin{aligned}
TV(fg, I_a^b) &= V_I\big((fg)(.,y)\big) + V_J\big((fg)(x,.)\big) + V_{I_a^b}(fg) \\
&\leq M_g V_I(f(.,y)) + M_f V_I(g(.,y)) + M_g V_J(f(x,.)) \\
&\qquad + M_f V_J(g(x.,)) + M_g V_{I_a^b}(f) + M_f V_{I_a^b}(g) \\
&\leq M_g V_I(f(.,y)) + M_g V_J(f(x,.)) + M_g V_{I_a^b}(f) \\
&\qquad + M_f V_I(g(.,y)) + M_f V_J(g(x,.)) \\
&\qquad + M_f V_{I_a^b}(g) \\
&\leq M_g \left(V_I(f(.,y)) + V_J(f(x,.)) + V_{I_a^b}(f) \right) \\
&\qquad + M_f \left(V_I(g(.,y)) + V_J(g(x,.)) + V_{I_a^b}(g) \right) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Oleh karena diperoleh $TV(fg, I_a^b) < \infty$ maka berdasarkan definisi 3.1.1 fungsi fg bervariasi terbatas pada I_a^b.

Selanjutnya akan dibahas mengenai hubungan fungsi bervariasi terbatas dengan fungsi monoton. Didefinisikan fungsi $f: I_a^b = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \to \mathbb{R}$ naik jika untuk setiap $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ dengan $x \leq x'$ dan $y \leq y'$ maka $f(x,y) \leq f(x',y')$.

Teorema 3.1.7

Jika f fungsi monoton naik pada I_a^b, maka f bervariasi terbatas pada I_a^b dan

a. $V_I(f(.,y)) = f(x_2, y) - f(x_1, y)$,
b. $V_J(f(x,.)) = f(x, y_2) - f(x, y_1)$,
c. $V_{I_a^b}(f) = \big(f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1)\big) - \big(f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)\big)$

Bukti.

a. Diketahui f monoton naik pada I_a^b, artinya untuk setiap $y \in J = [y_1, y_2]$, $f(.,y)$ monoton naik pada $I = [x_1, x_2]$ maka untuk setiap $y \in J = [y_1, y_2]$, berlaku

$$V_{[x_1,x_2]}\big(f(.,y)\big) = f(x_2, y) - f(x_1, y),$$

Diambil sebarang partisi $\{t_i | i = 1, \dots, m\}$ pada I dengan $t_i < t_{i+1}$ dan $t_1 = x_1$ serta $t_m = x_2$, diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)| &= \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)| \\ &= |f(t_2, y) - f(t_1, y)| + |f(t_3, y) - f(t_2, y)| + \cdots \\ &\qquad + |f(t_m, y) - f(t_{m-1}, y)|.\end{aligned}$$

Oleh karena $t_i < t_{i+1}$ dan f monoton naik maka $f(t_i, y) < f(t_{i+1}, y)$ untuk $i = 1,2, \dots, m$.
Sehingga,

$$\begin{aligned}&f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y) > 0 \\ &|f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)| = f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y).\end{aligned}$$

Karena f fungsi monoton naik pada I_a^b dan $x_1 = t_1 < t_2 < \cdots < t_m = x_2$, maka

$$\begin{aligned}V_I\big(f(.,y)\big) &= \sup_{P(I)} \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)| \\ &= \sup_{P(I)} \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)| \\ &= |f(t_2, y) - f(t_1, y)| + |f(t_3, y) - f(t_2, y)| + \cdots \\ &\qquad + |f(t_m, y) - f(t_{m-1}, y)|\end{aligned}$$

$$= f(t_2, y) - f(t_1, y) + f(t_3, y) - f(t_2, y) + \cdots + f(t_m, y) - f(t_{m-1}, y)$$
$$= f(t_m, y) - f(t_1, y),$$

Oleh karena $t_1 = x_1$ dan $t_m = x_2$, maka

$$V_I(f(.,y)) = f(x_2, y) - f(x_1, y).$$

Sehingga didapat $V_I(f(.,y)) = f(x_2, y) - f(x_1, y) < \infty$, maka $V_I(f(.,y))$ terbatas pada I_a^b.

b. Diketahui f monoton naik pada I_a^b, artinya untuk setiap $x \in I = [x_1, x_2]$, $f(x,.)$ monoton naik pada $J = [y_1, y_2]$ maka untuk setiap $x \in I = [x_1, x_2]$,

$$V_{[y_1,y_2]}\big(f(x,.)\big) = f(x, y_2) - f(x, y_1),$$

Diambil sebarang partisi $\{s_j \big| j = 1, \ldots, n\}$ pada J dengan $s_j < s_{j+1}$ dan $s_1 = y_1$ serta $s_n = y_2$, diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left|\Delta_{10} f(x, s_{j+1})\right| = \sum_{j=1}^{n-1} \left|f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j)\right|$$
$$= |f(x, s_2) - f(x, s_1)| + |f(x, s_3) - f(x, s_2)| + \cdots + |f(x, s_n) - f(x, s_{n-1})|.$$

Oleh karena $s_j < s_{j+1}$ dan f monoton naik maka $f(x, s_j) < f(x, s_{j+1})$ untuk $j = 1,2, \ldots, n$.
Sehingga,

$$f\big(x, s_{j+1}\big) - f\big(x, s_j\big) > 0$$
$$\big|f\big(x, s_{j+1}\big) - f\big(x, s_j\big)\big| = f\big(x, s_{j+1}\big) - f\big(x, s_j\big).$$

Karena f fungsi monoton naik pada I_a^b dan $y_1 = s_1 < s_2 < \cdots < s_n = y_2$, maka

$$V_J(f(x,.)) = \sup_{P(J)} \sum_{i=1}^{n-1} \left|\Delta_{01} f(x, s_{j+1})\right|$$
$$= \sup_{P(J)} \sum_{i=1}^{n-1} \left|f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= |f(x,s_2) - f(x,s_1)| + |f(x,s_3) - f(x,s_2)| + \cdots \\
&\qquad + |f(x,s_n) - f(x,s_{n-1})| \\
&= f(x,s_2) - f(x,s_1) + f(x,s_3) - f(x,s_2) + \cdots + f(x,s_n) \\
&\qquad - f(x,s_{n-1}) \\
&= f(x,s_n) - f(x,s_1).
\end{aligned}
$$

Oleh karena $s_1 = y_1$ dan $s_n = y_2$, maka

$$V_J(f(x,.)) = f(x,y_2) - f(x,y_1).$$

Sehingga didapat $V_J(f(x,.)) = f(x,y_2) - f(x,y_1) < \infty$, maka $V_J(f(x,.))$ terbatas pada I_a^b.

c. Diketahui f monoton naik pada I_a^b, artinya untuk setiap $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I_a^b = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, f monoton naik pada I_a^b maka untuk setiap $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I_a^b = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$,

$$V_{I_a^b}(f) = \big(f(x_2,y_2) - f(x_2,y_1)\big) - \big(f(x_1,y_2) - f(x_1,y_1)\big).$$

Diambil sebarang partisi

$Q = \{[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] \,|\, i = 1, \dots, m \text{ dan } j = 1, \dots, n\}$ pada I_a^b

dengan $(t_i, s_j) < (t_{i+1}, s_{j+1})$ dan $t_1 = x_1$, $t_m = x_2$, $s_1 = y_1$, serta $s_n = y_2$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} |\Delta_{11} f(t_{i+1}, s_{j+1})| &= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \Big|\big(f(t_{i+1},s_{j+1}) - f(t_{i+1},s_j)\big) - \big(f(t_i,s_{j+1}) - f(t_i,s_j)\big)\Big| \\
&= \big|\big(f(t_2,s_2) - f(t_2,s_1)\big) - \big(f(t_1,s_2) + f(t_1,s_1)\big)\big| \\
&\qquad + \big|\big(f(t_3,s_3) - f(t_3,s_2)\big) \\
&\qquad - \big(f(t_2,s_3) + f(t_2,s_2)\big)\big| + \cdots \\
&\qquad + \big|\big(f(t_m,s_n) - f(t_m,s_{n-1})\big) \\
&\qquad - \big(f(t_{m-1},s_n) + f(t_{m-1},s_{n-1})\big)\big|.
\end{aligned}
$$

Oleh karena $(t_i, s_j) < (t_{i+1}, s_{j+1})$ dan f monoton naik maka $f(t_i, s_j) < f(t_{i+1}, s_{j+1})$ untuk $i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, n$.
Sehingga,

$$\big(f(t_{i+1},s_{j+1}) - f(t_{i+1},s_j)\big) - \big(f(t_i,s_{j+1}) - f(t_i,s_j)\big) > 0$$

$$\left|\left(f\left(t_{i+1},s_{j+1}\right)-f\left(t_{i+1},s_j\right)\right)-\left(f\left(t_i,s_{j+1}\right)-f\left(t_i,s_j\right)\right)\right|$$
$$=\left(f\left(t_{i+1},s_{j+1}\right)-f\left(t_{i+1},s_j\right)\right)-\left(f\left(t_i,s_{j+1}\right)-f\left(t_i,s_j\right)\right)$$

Karena f fungsi monoton naik pada I_a^b dan $x_1 = t_1 < t_2 < \cdots < t_m = x_2$ serta $y_1 = s_1 < s_2 < \cdots < s_n = y_2$, maka

$$\begin{aligned}
V_{I_a^b}(f) &= \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{11} f\left(t_{i+1},s_{j+1}\right)\right| \\
&= \sup_Q \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\Big|\left(f\left(t_{i+1},s_{j+1}\right)-f\left(t_{i+1},s_j\right)\right) \\
&\qquad\qquad -\left(f\left(t_i,s_{j+1}\right)-f\left(t_i,s_j\right)\right)\Big| \\
&= \left|\left(f(t_2,s_2)-f(t_2,y_1)\right)-\left(f(x_1,s_2)-f(x_1,y_1)\right)\right| \\
&\qquad\qquad +\big|\left(f(t_3,s_3)-f(t_3,s_2)\right) \\
&\qquad\qquad -\left(f(t_2,s_3)-f(t_2,s_2)\right)\big|+\cdots \\
&\qquad\qquad +\big|\left(f(x_2,y_2)-f(x_2,s_{n-1})\right) \\
&\qquad\qquad -\left(f(t_{m-1},y_2)-f(t_{m-1},s_{n-1})\right)\big| \\
&= f(t_2,s_2)-f(t_2,y_1)-f(x_1,s_2)+f(x_1,y_1)+f(t_3,s_3) \\
&\qquad\qquad -f(t_3,s_2)-f(t_2,s_3)+f(t_2,s_2)+\cdots \\
&\qquad\qquad +\left(f(x_2,y_2)-f(x_2,s_{n-1})\right)-f(t_{m-1},y_2) \\
&\qquad\qquad +f(t_{m-1},s_{n-1}).
\end{aligned}$$

Oleh karena $t_1 = x_1$, $t_m = x_2$, $s_1 = y_1$, serta $s_n = y_2$, maka

$$V_{I_a^b}(f) = \left(f(x_2,y_2)-f(x_2,y_1)\right)\left(f(x_1,y_2)-f(x_1,y_1)\right).$$

Sehingga didapat $V_{I_a^b}(f) = \left(f(x_2,y_2)-f(x_2,y_1)\right)\left(f(x_1,y_2)-f(x_1,y_1)\right) < \infty$, maka $V_{I_a^b}(f)$ terbatas pada I_a^b.

Untuk memahami teorema 3.1.7 diberikan contoh berikut.

Contoh 3.1.3

Diberikan fungsi $f(x,y)\colon [0,1]\times[1,2]\to\mathbb{R}$, didefinisikan $f(x,y) = x + y$ pada $[0,1]\times[1,2]$, dari teorema 3.1.7, didapat

a. $V_{[0,1]}\big(f(.,y)\big) = f(x_2, y) - f(x_1, y)$
$= f(1, y) - f(0, y)$
$= (1 + y) - (0 + y)$
$= 1,\text{untuk setiap } y \in [1,2].$

b. $V_{[1,2]}\big(f(x,.)\big) = f(x, y_2) - f(x, y_1)$
$= f(x, 2) - f(x, 1)$
$= (x + 2) - (x + 1)$
$= 1,\text{untuk setiap } x \in [0,1].$

c. $V_{[0,1]\times[1,2]}(f) = \big(f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1)\big) - \big(f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)\big)$
$= \big(f(1,2) - f(1,1)\big) - \big(f(0,2) - f(0,1)\big)$
$= \big((1 + 2) - (1 + 1)\big) - \big((0 + 2) - (0 + 1)\big)$
$= (3 - 2) - (2 - 1)$
$= 0,\text{untuk setiap } (x, y) \in [0,1] \times [1,2]$

Sehingga dari poin a, b, dan c diperoleh

$$TV(f, [0,1] \times [1,2]) = V_{[0,1]}\big(f(.,y)\big) + V_{[1,2]}\big(f(.,y)\big) + V_{[0,1]\times[1,2]}(f)$$
$$= 1 + 1 + 0 = 2.$$

Jadi, $TV(f, [0,1] \times [1,2]) = 2 < \infty$. Dapat disimpulkan $f(x, y)$ bervariasi terbatas pada $[0,1] \times [1,2]$.

Selanjutnya, dipaparkan mengenai teorema yang menyatakan jika fungsi bervariasi terbatas pada suatu interval maka bervariasi terbatas juga pada setiap subintervalnya dan variasi fungsinya dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari variasi setiap subintervalnya

Teorema 3.1.8

Diberikan fungsi $f: I_a^b \to \mathbb{R}$, *dan sebarang* $y \in J$, *dan* $f(.,y): I = [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, *misalkan* $c \in [x_1, x_2]$. *Jika* $f(.,y)$ *bervariasi terbatas pada* $[x_1, c]$ *dan* $[c, x_2]$, *maka* $f(.,y)$ *bervariasi terbatas pada* $[x_1, x_2]$ *dan*

$$V_I(f(.,y)) = V_{[x_1,c]}(f(.,y)) + V_{[c,x_2]}(f(.,y)).$$

Bukti.

Diambil sebarang partisi $P(I) = \{t_i | i = 1, \dots, m\}$ pada $I = [x_1, x_2]$, misalkan $c \in [x_1, x_2]$ dan $t_{k-1} < c < t_k$, untuk suatu $k \in \{1,2, \dots, m\}$, sehingga

$$\sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)| = \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)|$$

$$= \sum_{i=1}^{k-2} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)| + |f(t_k, y) - f(t_{k-1}, y)|$$

$$+ \sum_{i=k}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)|$$

$$= \sum_{i=1}^{k-2} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)|$$

$$+ |f(t_k, y) - f(c, y) + f(c, y)$$

$$- f(t_{k-1}, y)| + \sum_{i=k}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)|$$

Oleh karena $t_{k-1} < c < t_k$, maka partisi $\{t_1, t_2 \dots, t_{k-1}, c\}$ terletak pada interval $[x_1, c]$ dan partisi $\{c, t_k, t_{k+1}, \dots, t_m\}$ terletak pada interval $[c, x_2]$, sehingga

$$\leq \sum_{i=1}^{k-2} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)| + |f(c, y) - f(t_{k-1}, y)||$$

$$+ |f(t_k, y) - f(c, y)| + \sum_{i=k}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)|$$

Maka, untuk sebarang partisi $P(I) = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ pada $I = [x_1, x_2]$, dan untuk setiap $y \in J = [y_1, y_2]$memenuhi

$$V_{[x_1,x_2]}(f(.\,, y)) \leq V_{[x_1,c]}(f(.\,, y)) + V_{[c,x_2]}(f(.\,, y))$$

Selanjutnya ditunjukkan $V_{[x_1,c]}(f(.\,, y)) + V_{[c,x_2]}(f(.\,, y)) \leq V_I(f(.\,, y))$.

Diambil sebarang partisi $P_1(I) = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ pada $[x_1, c]$ dan partisi $P_2(I) = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$ pada $[c, x_2]$, maka $P_1(I) \cup P_2(I) = \{t_1, t_2, \dots, t_k, r_1, r_2, \dots, r_l\}$ dengan $t_k, r_1 = c$. Sehingga, $P_1(I) \cup P_2(I) = \{x_1 = t_1, t_2, \dots, t_k = r_1 = c, r_2, \dots, r_l = x_2\}$ partisi pada $I = [x_1, x_2]$ dan berlaku

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k-1}|\Delta_{10}f(t_{i+1},y)| + \sum_{i=1}^{l-1}|\Delta_{10}f(r_{i+1},y)| \\
&= \sum_{i=1}^{k-1}|f(t_{i+1},y) - f(t_i,y)| + \sum_{i=1}^{l-1}|f(r_{i+1},y) - f(r_i,y)| \\
&= \sum_{i=1}^{k+l-2}|f(t_{i+1},y) - f(t_i,y)| \\
&\leq V_I(f(.,y))
\end{aligned}$$

Karena untuk setiap partisi $P_1(I) = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ pada $[x_1, c]$ dan partisi $P_2(I) = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$ pada $[c, x_2]$ memenuhi

$$\sum_{i=1}^{k-1}|\Delta_{10}f(t_{i+1},y)| + \sum_{i=1}^{l-1}|\Delta_{10}f(r_{i+1},y)| \leq V_I(f(.,y))$$

Maka berlaku

$$V_{[x_1,c]}(f(.,y)) + V_{[c,x_2]}(f(.,y)) \leq V_{[x_1,x_2]}\big(f(.,y)\big),$$

Oleh karena didapat $V_I(f(.,y)) \leq V_{[x_1,c]}(f(.,y)) + V_{[c,x_2]}(f(.,y))$ dan $V_{[x_1,c]}(f(.,y)) + V_{[c,x_2]}(f(.,y)) \leq V_I(f(.,y))$, maka

$$V_I(f(.,y)) = V_{[x_1,c]}(f(.,y)) + V_{[c,x_2]}(f(.,y)).$$

Karena $V_{[x_1,c]}(f(.,y)) < \infty$ dan $V_{[c,x_2]}(f(.,y)) < \infty$ maka $V_I(f(.,y)) = V_{[x_1,c]}(f(.,y)) + V_{[c,x_2]}(f(.,y)) < \infty$, sehingga $f(.,y)$ bervariasi terbatas pada $I = [x_1, x_2]$ untuk setiap $y \in [y_1, y_2]$.

Teorema 3.1.9

Diberikan fungsi $f: I_a^b \to \mathbb{R}$, dan sebarang $x \in J$, dan $f(x,.): J = [y_1, y_2] \to \mathbb{R}$, misalkan $d \in [y_1, y_2]$. Jika $f(x,.)$ bervariasi terbatas pada $[y_1, d]$ dan $[d, y_2]$, maka $f(x,.)$ bervariasi terbatas pada $[y_1, y_2]$ dan

$$V_J(f(x,.)) = V_{[y_1,d]}(f(x,.)) + V_{[d,y_2]}(f(x,.)).$$

Bukti.

Diambil sebarang partisi $P(J) = \{s_j \mid j = 1, \dots, n\}$ pada $[y_1, y_2]$, misalkan $d \in [y_1, y_2]$ dan $s_{w-1} < c < s_w$, untuk suatu $w \in \{1,2,\dots,n\}$, sehingga

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{01}f(x,s_{j+1})\right| = \sum_{j=1}^{n-1}\left|f(x,s_{j+1}) - f(x,s_j)\right|$$

$$= \sum_{j=1}^{w-2}\left|f(x,s_{j+1}) - f(x,s_j)\right| + |f(x,s_w) - f(x,s_{w-1})|$$

$$+ \sum_{j=w}^{n-1}|f(t_{i+1},y) - f(t_i,y)|$$

$$= \sum_{j=1}^{w-2}\left|f(x,s_{j+1}) - f(x,s_j)\right|$$

$$+ |f(x,s_w) - f(x,d) + f(x,d)$$

$$- f(x,s_{w-1})| + \sum_{j=w}^{n-1}\left|f(x,s_{j+1}) - f(x,s_j)\right|$$

Oleh karena $s_{w-1} < d < s_w$ maka partisi $\{s_1, s_2 \dots, s_{w-1}, d\}$ terletak pada interval $[y_1, d]$ dan partisi $\{d, s_w, s_{w+1}, \dots, s_n\}$ terletak pada interval $[d, y_2]$, sehingga

$$\leq \sum_{j=1}^{w-2}\left|f(x,s_{j+1}) - f(x,s_j)\right| + |f(x,d) - f(x,s_{w-1})|$$

$$+ |f(x,s_w) - f(x,d)| + \sum_{j=w}^{n-1}\left|f(x,s_{j+1}) - f(x,s_j)\right|$$

Maka, untuk sebarang partisi $P(J) = \{s_j | j = 1, \dots, n\}$ pada $J = [y_1, y_2]$, memenuhi

$$V_{[y_1,y_2]}(f(x,.)) \leq V_{[y_1,d]}(f(x,.)) + V_{[d,y_2]}(f(x,.)),$$

Selanjutnya ditunjukkan $V_{[y_1,d]}(f(x,.)) + V_{[d,y_2]}(f(x,.)) \leq V_J(f(x,.))$.

Diambil sebarang partisi $P_1(J) = \{s_1, s_2, \dots, s_w\}$ pada $[y_1, d]$ dan partisi $P_2(J) = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ pada $[d, y_2]$, maka $P_1(J) \cup P_2(J) = \{s_1, s_2, \dots, s_w, u_1, u_2, \dots, u_q\}$ dengan $s_w, u_1 = d$. Sehingga, $P_1(J) \cup P_2(J) = \{y_1 = s_1, s_2, \dots, s_w = u_1 = d, u_2, \dots, u_q = y_2\}$ partisi pada $J = [y_1, y_2]$ dan berlaku

$$\sum_{j=1}^{w-1}\left|\Delta_{01}f(x,s_{j+1})\right| + \sum_{j=1}^{q-1}\left|\Delta_{01}f(x,u_{j+1})\right|$$
$$= \sum_{j=1}^{w-1}\left|f(x,s_{j+1}) - f(x,s_j)\right| + \sum_{j=1}^{q-1}\left|f(x,u_{j+1}) - f(x,u_j)\right|$$
$$= \sum_{j=1}^{w+q-2}\left|f(x,s_{j+1}) - f(x,s_j)\right|$$

Karena untuk setiap partisi $P_1(J) = \{s_1, s_2, \dots, s_w\}$ pada $[y_1, d]$ dan partisi $P_2(J) = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ pada $[d, y_2]$ memenuhi

$$\sum_{j=1}^{w-1}\left|\Delta_{01}f(x,s_{j+1})\right| + \sum_{j=1}^{q-1}\left|\Delta_{01}f(x,u_{j+1})\right| \le V_{[y_1,y_2]}\big(f(x,.)\big)$$

Maka berlaku

$$V_{[y_1,d]}(f(x,.)) + V_{[d,y_2]}(f(x,.)) \le V_{[y_1,y_2]}\big(f(x,.)\big),$$

Oleh karena diperoleh $V_J(f(x,.)) \le V_{[y_1,d]}(f(x,.)) + V_{[d,y_2]}(f(x,.))$ dan $V_{[y_1,d]}(f(x,.)) + V_{[d,y_2]}(f(x,.)) \le V_J(f(x,.))$, maka $V_J(f(x,.)) = V_{[y_1,d]}(f(x,.)) + V_{[d,y_2]}(f(x,.))$.

Karena $V_{[y_1,d]}(f(x,.)) < \infty$ dan $V_{[d,y_2]}(f(x,.)) < \infty$ maka $V_J(f(x,.)) = V_{[y_1,d]}(f(x,.)) + V_{[d,y_2]}(f(x,.)) < \infty$, sehingga $f(x,.)$ bervariasi terbatas pada $J = [y_1, y_2]$ untuk setiap $x \in [x_1, x_2]$.

Teorema 3.1.10

Diberikan fungsi $f: I_a^b \to \mathbb{R}$, *misalkan* $(c,d) \in I_a^b = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. *Jika* f *bervariasi terbatas pada* $I_1 = [x_1, c] \times [y_1, d]$, $I_2 = [x_1, c] \times [d, y_2]$, $I_3 = [c, x_2] \times [y_1, d]$ *dan* $I_4 = [c, x_2] \times [d, y_2]$, *maka* f *bervariasi terbatas pada* I_a^b *dan*

$$V_{I_a^b}(f) = V_{I_1}(f) + V_{I_2}(f) + V_{I_3}(f) + V_{I_4}(f).$$

Bukti.

Diambil sebarang partisi $\{[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] | i = 1, \dots, m \text{ dan } j = 1, \dots, n\}$ pada $I_a^b = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, misalkan $(c, d) \in I_a^b = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ dan $(t_{k-1}, s_{w-1}) < (c, d) < (s_w, t_k)$, untuk suatu $k \in \{1,2, \dots, m\}$ dan $w \in \{1,2, \dots, n\}$, sehingga

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{11} f(t_{i+1}, s_{j+1})\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\left(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\right) - \left(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{k-2}\sum_{j=1}^{w-2}\left|\left(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\right) - \left(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\right)\right| \\
&+\left|\left(f(t_k, s_w) - f(t_k, s_{w-1})\right) - \left(f(t_{k-1}, s_w) - f(t_{k-1}, s_{w-1})\right)\right| \\
&+ \sum_{i=k}^{m-1}\sum_{j=w}^{n-1}\left|\left(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\right) - \left(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{k-2}\sum_{j=1}^{w-2}\left|\left(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\right) - \left(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\right)\right| \\
&+\Big|\left(f(c, d) - f(c, s_{w-1})\right) - \left(f(t_{k-1}, d) - f(t_{k-1}, s_{w-1})\right) \\
&\qquad + \left(f(c, s_w) - f(c, d)\right) \\
&\qquad - \left(f(t_{k-1}, s_w) - f(t_{k-1}, d)\right) \\
&\qquad + \left(f(t_k, d) - f(t_k, s_{w-1})\right) \\
&\qquad - \left(f(c, d) - f(c, s_{w-1})\right) + \left(f(t_k, s_w) - f(t_k, d)\right) \\
&\qquad - \left(f(c, s_w) - f(c, d)\right)\Big| \\
&+ \sum_{i=k}^{m-1}\sum_{j=w}^{n-1}\left|\left(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\right) - \left(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\right)\right|
\end{aligned}
$$

Oleh karena $(t_{k-1}, s_{w-1}) < (c, d) < (s_w, t_k)$, maka partisi

$Q_1 = \{t_1, t_2, \dots t_{k-1}, c\} \times \{s_1, s_2, \dots, s_{w-1}, d\}$ terletak pada interval $I_1 = [x_1, c] \times [y_1, d]$,
$Q_2 = \{t_1, t_2, \dots t_{k-1}, c\} \times \{d, s_w, s_{w+1}, \dots, s_n\}$ terletak pada interval $I_2 = [x_1, c] \times [d, y_2]$,
$Q_3 = \{c, t_{k+1}, t_{k+2}, \dots t_m\} \times \{s_1, s_2, \dots, s_{w-1}, d\}$ terletak pada interval $I_3 = [c, x_2] \times [y_1, d]$,

$Q_4 = \{c, t_{k+1}, t_{k+2}, \dots t_m\} \times \{d, s_w, s_{w+1}, \dots, s_n\}$ terletak pada interval $I_4 = [c, x_2] \times [d, y_2]$.

sehingga

$$\leq \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=1}^{w-2} \left|\left(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\right) - \left(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\right)\right|$$
$$+\left|\left(f(c,d) - f(c, s_{w-1})\right) - \left(f(t_{k-1}, d) - f(t_{k-1}, s_{w-1})\right)\right|$$
$$+\left|\left(f(c, s_w) - f(c,d)\right) - \left(f(t_{k-1}, s_w) - f(t_{k-1}, d)\right)\right|$$
$$+ \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=w+1}^{n-2} \left|\left(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\right) - \left(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\right)\right|$$
$$+ \sum_{i=k}^{m-1} \sum_{j=1}^{w-2} \left|\left(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\right) - \left(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\right)\right|$$
$$+\left|\left(f(t_k, d) - f(t_k, s_{w-1})\right) - \left(f(c,d) - f(c, s_{w-1})\right)\right|$$
$$+\left|\left(f(t_k, s_w) - f(t_k, d)\right) - \left(f(c, s_w) - f(c,d)\right)\right|$$
$$+ \sum_{i=k}^{m-1} \sum_{j=w}^{n-1} \left|\left(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\right) - \left(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\right)\right|.$$

Maka, untuk sebarang partisi

$Q = \{[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] \mid i = 1, \dots, m \text{ dan } j = 1, \dots, n\}$ pada $I_a^b = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, memenuhi

$$V_{I_a^b}(f) \leq V_{I_1}(f) + V_{I_2}(f) + V_{I_3}(f) + V_{I_4}(f).$$

Selanjutnya ditunjukkan $V_{I_1}(f) + V_{I_2}(f) + V_{I_3}(f) + V_{I_4}(f) \leq V_{I_a^b}(f)$.

Diambil sebarang partisi $Q_1 = \{t_1, t_2, \dots t_k\} \times \{s_1, s_2, \dots, s_w\}$ pada $I_1 = [x_1, c] \times [y_1, d]$,

partisi $Q_2 = \{t_1, t_2, \dots t_k\} \times \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ pada $I_2 = [x_1, c] \times [d, y_2]$,

partisi $Q_3 = \{r_1, r_2, \dots, r_l\} \times \{s_1, s_2, \dots, s_w\}$ pada $I_3 = [c, x_2] \times [y_1, d]$,

dan partisi $Q_3 = \{r_1, r_2, \dots, r_l\} \times \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ pada $I_4 = [c, x_2] \times [d, y_2]$, maka

$$Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 = \{t_1, t_2, \dots t_k, r_1, r_2, \dots, r_l\} \times \{s_1, s_2, \dots, s_w, u_1, u_2, \dots, u_q\},$$

dengan $t_k, r_1 = c$ dan $s_w, u_1 = d$. Sehingga, $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 = \{t_1, t_2, \dots t_k = r_1 = c, r_2, \dots, r_l\} \times \{s_1, s_2, \dots, s_w = u_1 = d, u_2, \dots, u_q\}$ partisi pada $I_a^b = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ dan berlaku

$$\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{w-1}|\Delta_{11}f(t_{i+1}, s_{j+1})| + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{q-1}|\Delta_{11}f(t_{i+1}, u_{j+1})| + \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{n-1}|\Delta_{11}f(r_{i+1}, s_{j+1})| + \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{q-1}|\Delta_{11}f(r_{i+1}, u_{j+1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{w-1}\left|\left(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\right) - \left(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\right)\right|$$
$$+ \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{q-1}\left|\left(f(t_{i+1}, u_{j+1}) - f(t_{i+1}, u_j)\right) - \left(f(t_i, u_{j+1}) - f(t_i, u_j)\right)\right|$$
$$+ \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\left(f(r_{i+1}, s_{j+1}) - f(r_{i+1}, s_j)\right) - \left(f(r_i, s_{j+1}) - f(r_i, s_j)\right)\right|$$
$$+ \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{q-1}\left|\left(f(r_{i+1}, u_{j+1}) - f(r_{i+1}, u_j)\right) - \left(f(r_i, u_{j+1}) - f(r_i, u_j)\right)\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{2k+2l-4}\sum_{j=1}^{2w+2q-4}\left|\left(f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j)\right) - \left(f(t_i, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)\right)\right|$$

Karena untuk setiap partisi Q_1 pada I_1, partisi Q_2 pada I_2, partisi Q_3 pada I_3, dan partisi Q_4 pada I_4, memenuhi

$$V_{I_1}(f) + V_{I_2}(f) + V_{I_3}(f) + V_{I_4}(f) \le V_{I_a^b}(f).$$

Oleh karena diperoleh $V_{I_a^b}(f) \le V_{I_1}(f) + V_{I_2}(f) + V_{I_3}(f) + V_{I_4}(f)$ dan $V_{I_1}(f) + V_{I_2}(f) + V_{I_3}(f) + V_{I_4}(f) \le V_{I_a^b}(f)$, maka

$$V_{I_a^b}(f) = V_{I_1}(f) + V_{I_2}(f) + V_{I_3}(f) + V_{I_4}(f).$$

Karena $V_{I_1}(f) < \infty$, $V_{I_2}(f) < \infty$, $V_{I_3}(f) < \infty$, dan $V_{I_4}(f) < \infty$ maka $V_{I_a^b}(f) = V_{I_1}(f) + V_{I_2}(f) + V_{I_3}(f) + V_{I_4}(f) < \infty$, sehingga f bervariasi terbatas pada I_a^b.

Berikut diberikan contoh dari fungsi bervariasi terbatas dua variabel.

Contoh 3.1.4

Diberikan fungsi $f(t,s): [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, dengan $f(t,s) = 3\sqrt{t} + \ln(t+1) - 5\sqrt[3]{s^2}$. Akan dibuktikan bahwa fungsi f merupakan fungsi bervariasi terbatas pada $[0,1] \times [0,1]$.

Diambil sebarang partisi $P(I)$ pada $I = [0,1]$, misalkan $P(I) = \{t_i | i = 1, \dots, m\} = \left\{\frac{i}{m} \middle| i = 1, \dots, m\right\}$ dan sebarang partisi $P(J)$ pada $J = [0,1]$, misalkan $P(J) = \{s_j | j = 1, \dots, n\} = \left\{\frac{j}{n} \middle| j = 1, \dots, n\right\}$. Maka partisi dari interval $I_a^b = [0,1] \times [0,1]$ adalah

$$\left\{\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \middle| i = 1, \dots, m \text{ dan } j = 1, \dots, n\right\}.$$

Variasi total dari fungsi f adalah

$$TV\left(f, I_a^b\right) = V_I(f(.,y)) + V_J(f(x,.)) + V_{I_a^b}(f)$$

a. Pertama akan dihitung untuk $V_I(f(.,y))$,

$$\begin{aligned}
V_m\left(f(.,y)\right) &= \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \left| f\left(\frac{i+1}{m}, y\right) - f\left(\frac{i}{m}, y\right) \right| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \left| \left(3\sqrt{\frac{i+1}{m}} + \ln\left(\frac{i+1}{m} + 1\right) - 5\sqrt[3]{y^2}\right) \right. \\
&\qquad \left. - \left(3\sqrt{\frac{i}{m}} + \ln\left(\frac{i}{m} + 1\right) - 5\sqrt[3]{y^2}\right) \right| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \left| \left(3\sqrt{\frac{i+1}{m}} + \ln\left(\frac{i+1}{m} + 1\right) - 5\sqrt[3]{y^2}\right) \right. \\
&\qquad \left. - \left(3\sqrt{\frac{i}{m}} + \ln\left(\frac{i}{m} + 1\right) - 5\sqrt[3]{y^2}\right) \right|
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \left| \left(3\sqrt{\frac{i+1}{m}} - 3\sqrt{\frac{i}{m}} \right) + \left(\ln\left(\frac{i+1}{m} + 1\right) - \ln\left(\frac{i}{m} + 1\right) \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{m-1} \left(3\sqrt{\frac{i+1}{m}} - 3\sqrt{\frac{i}{m}} \right) + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\ln\left(\frac{i+1}{m} + 1\right) - \ln\left(\frac{i}{m} + 1\right) \right) \right|$$

$$= \left| 3\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{i=1}^{m-1} (\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) \right) \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\ln\left(\frac{i+1+m}{m}\right) - \ln\left(\frac{i+m}{m}\right) \right) \right|$$

$$= \left| 3\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}} (\sqrt{m} - 1) + \ln\frac{2m}{1+m} \right|.$$

Sehingga,

$$V(f(.,y)) = \sup_{m\in\mathbb{N}} V_m(f,(.,y))$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(3\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}} (\sqrt{m} - 1) + \ln\frac{2m}{1+m} \right) = 3 + \ln 2.$$

b. Akan dihitung untuk $V_J(f(x,.))$,

$$V_n(f(x,.)) = \sum_{j=1}^{n-1} |\Delta_{10} f(x, s_{j+1})|$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} |f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j)|$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left| f\left(x, \frac{j+1}{n}\right) - f\left(x, \frac{j}{n}\right) \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left| \left(3\sqrt{x} + \ln(x+1) - 5\sqrt[3]{\left(\frac{i+1}{n}\right)^2} \right) \right.$$

$$\left. - \left(3\sqrt{x} + \ln(x+1) - 5\sqrt[3]{\left(\frac{i}{n}\right)^2} \right) \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left| \left(-5\sqrt[3]{\left(\frac{i+1}{n}\right)^2} \right) + 5\sqrt[3]{\left(\frac{i}{n}\right)^2} \right|$$

$$= 5\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\sqrt[3]{(i+1)^2} - \sqrt[3]{(i)^2}\right|$$
$$= 5\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\left(\sqrt[3]{n^2} - 1\right).$$

Sehingga,

$$V\big(f(x,.)\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} V_n\big(f(x,.)\big)$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(5\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\left(\sqrt[3]{n^2} - 1\right)\right) = 5.$$

c. Akan dihitung untuk $V_{I_a^b}(f)$, dengan $I_a^b = [0,1]\times[0,1]$

$$V_{mn}(f) = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\Delta_{11} f\big(t_{i+1}, s_{j+1}\big)\right|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\Big|\Big(f\big(t_{i+1}, s_{j+1}\big) - f\big(t_{i+1}, s_j\big)\Big) - \Big(f\big(t_i, s_{j+1}\big) - f\big(t_i, s_j\big)\Big)\Big|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left|\left(\left(3\sqrt{\left(\frac{i+1}{m}\right)} + \ln\left(\frac{i+1}{m}+1\right) - 5\sqrt[3]{\left(\frac{j+1}{n}\right)^2}\right) - \left(3\sqrt{\left(\frac{i+1}{m}\right)} + \ln\left(\frac{i+1}{m}+1\right) - 5\sqrt[3]{\left(\frac{j}{n}\right)^2}\right)\right) - \left(3\sqrt{\left(\frac{i}{m}\right)} + \ln\left(\frac{i}{m}+1\right) - 5\sqrt[3]{\left(\frac{j+1}{n}\right)^2} - \left(3\sqrt{\left(\frac{i}{m}\right)} + \ln\left(\frac{i}{m}+1\right) - 5\sqrt[3]{\left(\frac{j}{n}\right)^2}\right)\right)\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left|5\left(\sqrt[3]{\left(\frac{j+1}{n}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{j}{n}\right)^2}\right) - 5\left(\sqrt[3]{\left(\frac{j+1}{n}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{j}{n}\right)^2}\right)\right|$$

$$= 0.$$

Sehingga,

$$V_{I_a^b}(f) = \sup V_{m,n\in\mathbb{N}}(f) = 0$$

Dari a, b, dan c didapat,

$$TV\left(f, I_a^b\right) = V_I(f(.,y)) + V_J(f(x,.)) + V_{I_a^b}(f)$$
$$= 3 + \ln 2 + 5$$
$$= 8 + \ln 2 < \infty.$$

Oleh karena diperoleh $TV\left(f, I_a^b\right) = 8 + \ln 2 < \infty$, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi f bervariasi terbatas pada $I_a^b = [0,1] \times [0,1]$.

Contoh 3.1.5

Diberikan fungsi $f(t,s)$: $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, dengan $f(t,s) = 2t + \cos\left(\frac{\pi}{s}\right)$. Akan dibuktikan bahwa fungsi f tidak fungsi bervariasi terbatas pada $[0,1] \times [0,1]$.

Diambil sebarang partisi $P(I) = \{t_i | i = 1, \dots, m\}$ pada $I = [0,1]$, misalkan $\{t_i, t_{i+1} | i = 1, \dots, m\} = \left\{\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m} \middle| i = 1, \dots, m\right\}$ dan sebarang partisi $P(J) = \{s_j | j = 1, \dots, n\}$ pada $J = [0,1]$, misalkan $\{s_j, s_{j+1} | j = 1, \dots, n\} = \left\{\frac{1}{2j}, \frac{1}{2j-1} \middle| j = 1, \dots, n\right\}$.

Maka partisi dari interval $I_a^b = [0,1] \times [0,1]$ adalah $\left\{\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right] \times \left[\frac{1}{2j-1}, \frac{1}{2j}\right] \middle| i = 1, \dots, m \text{ dan } j = 1, \dots, n\right\}$. Variasi total dari fungsi f adalah

$$TV\left(f, I_a^b\right) = V_I(f(.,y)) + V_J(f(x,.)) + V_{I_a^b}(f)$$

a. Pertama akan dihitung untuk $V_I(f(.,y))$,

$$V_m(f(.,y)) = \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} \left| f\left(\frac{i+1}{m}, y\right) - f\left(\frac{i}{m}, y\right) \right|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} \left| \left(2\left(\frac{i+1}{m}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{y}\right)\right) - \left(2\left(\frac{i}{m}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{y}\right)\right) \right|$$
$$= 2\sum_{i=1}^{m-1} \left| \left(\frac{i+1}{m}\right) - \left(\frac{i}{m}\right) \right|$$
$$= 2\left(\frac{m-1}{m}\right)$$

Sehingga,

$$V_I(f(.,y)) = \sup_{m\in\mathbb{N}} V_m(f,(.,y))$$
$$= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(2\left(\frac{m-1}{m}\right)\right) = 2.$$

b. Akan dihitung untuk $V_J(f(x,.))$,

$$V_n(f(x,.)) = \sum_{j=1}^{n-1} |\Delta_{10} f(x, s_{j+1})|$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} |f(x, s_{j+1}) - f(x, s_j)|$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left| f\left(x, \frac{1}{2j-1}\right) - f\left(x, \frac{1}{2j}\right) \right|$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left| \left(2x + \cos((2j-1)\pi)\right) - \left(2x + \cos((2j)\pi)\right) \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} |(-1) - (1)|$$
$$\geq 2(n-1)$$

Sehingga,

$$V_J\big(f(x,.)\big) = \sup_{n \in \mathbb{N}} V_n\big(f(x,.)\big)$$
$$= \infty.$$

c. Akan dihitung untuk $V_{I_a^b}(f)$, dengan $I_a^b = [0,1] \times [0,1]$

$$V_{mn}(f) = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \left|\Delta_{11} f\big(t_{i+1}, s_{j+1}\big)\right|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \left|\Big(f\big(t_{i+1}, s_{j+1}\big) - f\big(t_{i+1}, s_j\big)\Big) - \Big(f\big(t_i, s_{j+1}\big) - f\big(t_i, s_j\big)\Big)\right|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \left|\left(\left(2\left(\frac{i+1}{m}\right) + \cos\big((2j-1)\pi\big)\right)\right.\right.$$
$$\left. - \left(\left(2\left(\frac{i+1}{m}\right) + \cos\big((2j)\pi\big)\right)\right)\right)$$
$$- \left(\left(2\left(\frac{i}{m}\right) + \cos\big((2j-1)\pi\big)\right)\right.$$
$$\left.\left. - \left(\left(2\left(\frac{i}{m}\right) + \cos\big((2j)\pi\big)\right)\right)\right)\right|$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} \Big|\cos\big((2j-1)\pi\big) - \cos\big((2j)\pi\big) - \cos\big((2j-1)\pi\big)$$
$$+ \cos\big((2j)\pi\big)\Big|$$
$$= 0.$$

Sehingga,

$$V_{I_a^b}(f) = \sup V_{m,n \in \mathbb{N}}(f) = 0$$

Dari a, b, dan c didapat,

$$TV(f, I_a^b) = V_I(f(.,y)) + V_J(f(x,.)) + V_{I_a^b}(f)$$
$$= 2 + \infty + 0 = \infty.$$

Oleh karena diperoleh $TV\left(f, I_a^b\right) = \infty$, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi f tidak bervariasi terbatas pada $I_a^b = [0,1] \times [0,1]$.

Suatu fungsi kontinu dikatakan bervariasi terbatas jika memenuhi syarat perlu dan syarat cukup yaitu dapat dinyatakan sebagai selisih dua fungsi kontinu naik monoton, tetapi terdapat suatu fungsi kontinu yang tidak bervariasi terbatas.

Contoh 3.1.6

Diberikan fungsi trigonometri

$$f(t,s) = \begin{cases} t\sin\left(\dfrac{1}{s}\right) - s\sin\left(\dfrac{1}{t}\right) & ,(t,s) \neq (0,0) \\ 0 & ,(t,s) = (0,0) \end{cases} \quad \text{pada } [0,1] \times [0,1]$$

Ditunjukkan fungsi $f(t,s)$ kontinu, untuk $t \neq 0$ dan $s \neq 0$, maka didapat

$$\left|t\sin\left(\frac{1}{s}\right) - s\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq \left|t\sin\left(\frac{1}{s}\right)\right| - \left|s\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right|$$
$$\leq |t|.1 - |s|.1$$
$$\leq |t| - |s|$$

Sehingga untuk

$$f(t,s) = \begin{matrix} t\sin\left(\frac{1}{s}\right) - s\sin\left(\frac{1}{t}\right) & ,(t,s) \neq (0,0) \\ 0 & ,(t,s) = (0,0) \end{matrix}$$

Didapat

$$|f(t,s)| \leq |t| - |s|$$

Untuk setiap (t,s), maka

$$\lim_{(t,s)\to(0,0)} f(t,s) = 0$$

Dan diketahui $f(t,s) = 0$ untuk $t = 0$ dan $s = 0$. Sehingga fungsi tersebut kontinu.

Dibuktikan fungsi $f(t,s)$ tidak bervariasi terbatas. Diambil sebarang partisi $P(I)$ pada $I = [0,1]$, yaitu

$$P(I) = \{t_i | i = 1,2,\dots,m\} = \left\{\left[\frac{2}{(2i+1)\pi}, \frac{2}{(2i-1)\pi}\right] \middle| i = 1,2,\dots,m\right\}$$

dan sebarang partisi $P(J)$ pada $J = [0,1]$, yaitu

$$P(J) = \{s_j | j = 1,2,\dots,n\} = \left\{\left[\frac{2}{(2j+1)\pi}, \frac{2}{(2j-1)\pi}\right] \middle| j = 1,2,\dots,n\right\}.$$

Maka partisi dari interval $I_a^b = [0,1] \times [0,1]$ adalah

$$\left\{\left[\frac{2}{(2i+1)\pi}, \frac{2}{(2i-1)\pi}\right] \times \left[\frac{2}{(2j+1)\pi}, \frac{2}{(2j-1)\pi}\right] \middle| i = 1,\dots,m \text{ dan } j = 1,\dots n\right\}.$$

Variasi total dari fungsi f adalah

$$TV(f, I_a^b) = V_I(f(.,y)) + V_J(f(x,.)) + V_{I_a^b}(f)$$

a. Untuk $V_I(f(.,y))$

$$\begin{aligned}
V_m(f(.,y)) &= \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_{10} f(t_{i+1}, y)| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} |f(t_{i+1}, y) - f(t_i, y)| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \left| f\left(\frac{2}{(2i-1)\pi}, y\right) - f\left(\frac{2}{(2i+1)\pi}, y\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \left| \left(\left(\frac{2}{(2i-1)\pi} \sin\frac{1}{y}\right) - \left(y \sin\frac{(2i-1)\pi}{2}\right)\right)\right. \\
&\qquad - \left(\left(\frac{2}{(2i+1)\pi} \sin\frac{1}{y}\right)\right. \\
&\qquad \left.\left. - \left(y \sin\frac{(2i+1)\pi}{2}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \left| \left(\frac{2}{(2i-1)\pi} \sin\frac{1}{y}\right) - y(-1) - \left(\frac{2}{(2i+1)\pi} \sin\frac{1}{y}\right)\right. \\
&\qquad \left. - y(1)\right|
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \left| \left(\frac{2}{(2i-1)\pi} \sin \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{2}{(2i+1)\pi} \sin \frac{1}{y} \right) + y + y \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \left| \left(\frac{2}{(2i-1)\pi} \sin \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{2}{(2i+1)\pi} \sin \frac{1}{y} \right) + 2y \right|$$

Oleh karena

$$\sum_{i=1}^{m-1} 2y \geq 2y(m-1)$$

Maka

$$V_I(f(.,y)) = \infty.$$

Oleh karena diperoleh $V_I(f(.,y)) = \infty$, maka $TV\left(f, I_a^b\right) = \infty$. Sehingga fungsi tersebut tidak bervariasi terbatas.

BAB IV

KESIMPULAN

Penelitian ini merupakan penyelidikan sifat-sifat yang mungkin berlaku pada fungsi bervariasi terbatas pada ruang $\mathbb{R}^2$ dengan berdasarkan sifat-sifat yang berlaku pada fungsi bervariasi terbatas pada ruang $\mathbb{R}$. Pembuktian sifat – sifat fungsi bervariasi terbatas pada ruang $\mathbb{R}^2$ dilakukan dengan cara yang analog seperti pada sifat dan bukti fungsi variasi terbatas ruang $\mathbb{R}$. Dalam penelitian ini disimpulkan bahwa sifat-sifat yang berlaku pada fungsi variasi terbatas pada ruang $\mathbb{R}$ juga berlaku untuk fungsi bervariasi terbatas pada ruang $\mathbb{R}^2$. Himpunan semua fungsi bervariasi terbatas tertutup terhadap operasi perkalian skalar, penjumlahan dua fungsi, dan perkalian dua fungsi. Selain itu juga disimpulkan bahwa fungsi bervariasi terbatas dua variabel juga merupakan fungsi terbatas pada setiap sub persegi subset $\mathbb{R}^2$. Setiap variasi dari fungsi bervariasi terbatas dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari setiap sub perseginya. Yang terakhir penelitian ini juga membahas mengenai hubungan fungsi bervariasi terbatas dengan fungsi monoton.

DAFTAR PUSTAKA

A. Azocar, O. Mejia, N. Merentes, dan S. Rivas. (2015): The Space of Functions of Two Variables of Bounded $\mathcal{K}\phi$- Variation in the Sense of Schramm-Korenblum, *Hindawi Publishing Corporation*, volume 2015, Article ID 727312.

A. B. Owen. (2004): Multidimensional variation for quasi-monte Carlo, Tech. Rep. 2004-02, *Department of Statistic*, Stanford University.

C. R. Adams dan J. A Clarkson. (1934): Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation, *Transaction of the American Mathematical Society*, vol. 36, no. 4, pp. 711-730.

D. Idczak. (1991): Function of several variables of finite variation and their differentiability, *Mathematic Subject Classification*, 26B05, 26B30.

J. A. Clarkson dan C. R. Adams. (1933): On definitions of bounded variation for functions of two variables *Transaction of the American Mathematical Society*, vol. 35, no. 4, pp. 824-854.

J.H. Dshalalow. (2001): Real Analysis: An Introduction to the Theory of Real Functions and Integration, *Florida*, Chapman & Hall/CRC.

R. A. Gordon. (1994): The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock, *Graduate Studies in Mathematics*, Vol. 4, American Mathematical Society.

R.G. Bartle, dan D.R. Sherbert. (2011): Introduction to Real Analysis Fourth Edition, *Urbana-Champaign*, John Wiley & Sons, Inc.

W. F. Trench. (2002): Introduction to Real Analysis, *San Antonio*, Prentice Hall.

PROFIL PENULIS

Dr. Susilo Hariyanto, S.Si., M.Si. Lahir di Sukoharjo pada 14 Oktober 1974. Lulus S1 di Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada (UGM) tahun 1999, Lulus S2 di Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada (UGM) tahun 2002 dan Lulus S3 di Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada (UGM) tahun 2015. Saat ini adalah Pengajar tetap Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro Semarang sejak 2001 hingga saat ini. Bidang keahlian Matematika Analisis dan Matematika Terapan.

Y.D. Sumanto, S.Si., M.Si. Lahir di Sleman pada 18 September 1964. Lulus S1 di Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada (UGM) tahun 1990, Lulus S2 di Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada (UGM) tahun 2002. Saat ini adalah Pengajar tetap Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro Semarang sejak 1993 hingga saat ini. Bidang keahlian Matematika Analisis.

Indah Dwi Murdianingsih, S.Mat., M.Mat. Lahir di Demak pada 22 Juni 1997. Lulus S1 di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro (UNDIP) tahun 2019, Lulus S2 di Program Studi Magister Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro (UNDIP) tahun 2021.