HIMPUNAN ENDOMORFISMA DARI OBYEK KOGRUP SUATU KATEGORI SEBAGAI B1-NEAR RING

by Nikken Prima Puspita

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA (1st SENATIK)
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FPMIPATI-UNIVERSITAS PGRI SEMARANG
Semarang, 13 Agustus 2016

HIMPUNAN ENDOMORFISMA DARI OBYEK KOGRUP SUATU KATEGORI SEBAGAI B_1-NEAR RING

Nikken Prima Puspita

Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro, Semarang
Jl. Prof. Soedarto Kampus UNDIP Tembalang, 50275
email: nikkenprima@yahoo.com

Abstrak

Setiap obyek dalam kategori yang dilengkapi dengan obyek inisial dan koproduk disebut obyek kogrup asalkan obyek tersebut memenuhi sifat koasosiatif, mempunyai elemen koidentitas dan memenuhi sifat koinvers. Untuk setiap obyek kogrup *G*, himpunan endomorfisma dari *G* ke *G* yaitu *Hom(G,G)* merupakan near ring terhadap operasi penjumlahan "$\underline{\oplus}$" dan operasi pergandaan "$\circ$". Pada Tulisan ini diperlihatkan bahwa *Hom(G,G)* dapat dipandang sebagai B_1- near ring terhadap kedua operasi biner tersebut.

Kata Kunci: kategori, obyek Kogrup, near ring, B_1- near ring.

Abstract

Every object on category with initial object and coproduct is called cogroup object if that object satisfied coassociative condition, there is element coidentity and fullfied coinvers condition. For any objeck cogroup G, set of endhomorphism G i.e Hom(G,G) is near ring over additive operation "$\underline{\oplus}$" and multiplicative operation "$\circ$". In This article we shown that Hom(G,G) can be considering as B_1- near ring over both operation.

***Key words :** categories, cogroup object, near ring, B_1- near ring*

A. PENDAHULUAN

Kategori terdiri dari kelas yang berisi obyek-obyek dan himpunan morfisma dari obyek satu ke obyek lainnya serta memenuhi aturan tertentu (Schubert, 1972). Dalam kategori dikenal adanya obyek terminal dan inisial serta produk dan koproduk. Dalam clay (1994) setiap obyek dalam kategori yang memuat obyek terminal dan produk serta memenuhi aksioma tertentu (menyerupai aksioma grup) disebut obyek grup. Dual dari obyek grup disebut obyek kogrup yaitu obyek dengan sifat khusus yang diperoleh dari kategori yang memuat obyek inisial dan koproduk. Pada artikel ini dibutuhkan pemahaman tentang teori kategori dan fungtor yang dapat dipelajari di(Schubert, 1972; Adamek, dkk., 2004; Pareigis, 1970).

Near ring merupakan generalisasi dari ring. Himpuanan *N* dengan operasi Penjumlahan "+" dan perkalian "$\cdot$" disebut near ring asalkan $(N,+)$ adalah grup, $(N,\cdot)$ semigrup dan $(N,+,\cdot)$ memenuhi salah satu hukum distributif (kiri atau kanan) (Pilz, 1983). Jika $(N,+,\cdot)$ memenuhi hukum distributif kiri, maka near ring $(N,+,\cdot)$ disebut near ring kiri dan sebaliknya jika $(N,+,\cdot)$ memenuhi distributif kanan, maka $(N,+,\cdot)$ disebut near ring kanan. Pada (Nikken, dkk., 2007; Clay, 1994) telah dijelaskan bahwa himpunan endomorfisma dari obyek grup G yang dinotasikan $Hom(G,G)$ dapat membentuk struktur sebagai near ring (kanan) terhadap operasi biner "$\overline{\oplus}$" dan "$\circ$" yang didefinisikan pada $Hom(G,G)$. Dilain pihak untuk himpunan endomorfisma dari obyek kogrup G-pun juga diperoleh hasil yang analog bahwa himpunan $Hom(G,G)$ dapat membentuk struktur sebagai near ring (kiri) terhadap operasi "$\underline{\oplus}$" dan "$\circ$".

Pada Balakhrisnan, dkk. (2011) diperkenalkan tentang B_1 near ring sebagai suatu jenis near ring. Near ring $(N,+,\square)$ disebut *B₁* -near ring jika untuk setiap $a \in N$ terdapat $x \in N^*$ sedemikian sehingga $Nax = Nxa$. Pada makalah ini akan diperlihatkan bahwa Untuk setiap obyek kogrup G, maka neari ring kiri $(Hom(G,G),\underline{\oplus},\circ)$ merupakan *B₁* -near ring.

B. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Near ring dan *B₁* -Near ring

Pada bab ini diberikan definisi dari near ring yang merupakan perumuman dari ring, selain itu juga akan diberikan beberapa contoh near ring.

Definisi 1 *Himpunan* N *dengan dua operasi biner* $"+"$ dan $"\bullet"$ *disebut* ***near ring*** *jika*

1. Himpunan $(N,+)$ *adalah grup (tidak harus abelian),*

2. Himpunan $(N,\bullet)$ *adalah semigrup,*

3. Himpunan $(N,+,\bullet)$ *memenuhi sifat distributif kanan atau kiri.*

a. Distributif kiri :

$$(\forall n_1,n_2,n_3 \in N) n_1 \bullet (n_2+n_3) = n_1 \bullet n_2 + n_1 \bullet n_3$$

b. Distributif kanan :

$$(\forall n_1,n_2,n_3 \in N)(n_1+n_2) \bullet n_3 = n_1 \bullet n_3 + n_2 \bullet n_3$$

Near ring yang memenuhi hukum distributif kiri disebut near ring kiri yang hukum distributif kanan . Near ring N terhadap operasi $"+"$ dan $"\bullet"$ dinotasikan dengan $(N,+,\bullet)$.

Contoh 2 Diberikan grup Γ dengan operasi "+" (tak harus abelian), dengan elemen netral o ("*omykron*"). Jika pada grup Γ didefinisikan operasi "•" yaitu $(\forall \delta,\gamma \in \Gamma)\gamma \bullet \delta = o$, maka $(\Gamma,+,\bullet)$ merupakan near ring.

Contoh 3 Diberikan grup $(\Gamma,+)$. Dibentuk $End(\Gamma) = \{f \mid f:\Gamma \to \Gamma\} = \Gamma^\Gamma$, yaitu himpunan semua fungsi dari grup Γ ke grup Γ, maka $End(\Gamma)$ merupakan near ring, terhadap operasi jumlahan $"\tilde{\oplus}"$ dan komposisi fungsi $"\circ"$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$(\forall f,g \in End(\Gamma))(\forall x \in \Gamma)(f \tilde{\oplus} g)(x) = f(x)+g(x)$$

(1) $(\forall f,g \in End(\Gamma))(\forall x \in \Gamma)(f \circ g)(x) = f(g(x))$

(2)

1. Himpunan $(End(\Gamma),\tilde{\oplus})$ merupakan grup.

(a)Tertutup

Untuk setiap $f,g \in End(\Gamma)$, dan $x \in \Gamma$, berlaku $(f \tilde{\oplus} g)(x) = f(x)+g(x)$, karena $f(x)+g(x) \in \Gamma$, maka $f \tilde{\oplus} g \in End(\Gamma)$.

(b) Asosiatif

Untuk setiap $f,g,h \in End(\Gamma)$, dan $x \in \Gamma$, berlaku

$$((f \tilde{\oplus} g) \tilde{\oplus} h)(x) = (f \tilde{\oplus} g)(x)+h(x) = f(x)+g(x)+h(x)$$
$$= f(x)+(g \tilde{\oplus} h)(x) = (f \tilde{\oplus}(g \tilde{\oplus} h))(x)$$

(c) Elemen netral

$$(\exists o \in End(\Gamma))(\forall x \in \Gamma)(\forall f \in End(\Gamma))(f \tilde{\oplus} o)(x)$$
$$= f(x)+o(x) = f(x)$$
$$(\exists o \in End(\Gamma))(\forall x \in \Gamma)(\forall f \in End(\Gamma))(o \tilde{\oplus} f)(x)$$
$$= o(x)+f(x) = f(x)$$

yaitu dapat ditemukan fungsi $o:\Gamma \to \Gamma$ yang memetakan elemen netral Γ kepada dirinya sendiri sehingga $o(x)$ merupakan elemen netral di $End(\Gamma)$.

(d) Elemen invers

$$(\forall f \in End(\Gamma))(\exists f^{-1} \in End(\Gamma))(\forall x \in \Gamma)(f \tilde{\oplus} f^{-1})(x) = (f^{-1} \tilde{\oplus} f)(x) = o(x)$$

Untuk setiap $f \in End(\Gamma)$, pasti dapat ditemukan $f^{-1}:\Gamma \to \Gamma$ dengan $f^{-1} = -f$, yaitu $-f:\Gamma \to \Gamma$ $x \mapsto -f(x)$, sehingga

$$(f \tilde{\oplus}(-f))(x) = f(x)-f(x) = -f(x)+f(x)$$
$$= (-f \tilde{\oplus} f)(x) = o(x)$$

Dari (a) – (d) terbukti bahwa $(End(\Gamma),\tilde{\oplus})$ merupakan grup.

2. Himpunan $(End(\Gamma),\circ)$ adalah semigrup.

(a) Tertutup

Untuk setiap $f,g \in End(\Gamma)$, dan $x \in \Gamma$, berlaku $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, karena

$f\left(g\left(x\right)\right)$ juga merupakan fungsi dari grup Γ ke grup Γ, maka $f \circ g \in End\left(\Gamma\right)$.

(b) Assosiatif

$$\left(\forall f, g, h \in End\left(\Gamma\right)\right)((f \circ g) \circ h)(x)$$
$$= (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
$$\left(\left(f \circ g\right) \circ h\right)\left(x\right) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

3.Himpunan $\left(End\left(\Gamma\right), \tilde{\oplus}, \circ\right)$ berdistributif kanan.

$$\left(\forall f, g, h \in End\left(\Gamma\right)\right)((f \,\tilde{\oplus}\, g) \circ h)(x) = (f \,\tilde{\oplus}\, g)(h(x))$$
$$= f(h(x)) + g(h(x)) = (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x)$$
$$= \left(\left(f \circ h\right) \tilde{\oplus} \left(g \circ h\right)\right)\left(x\right)$$

Dari (1) – (3), maka terbukti $\left(End\left(\Gamma\right), \tilde{\oplus}, \circ\right)$ merupakan near ring. □

B_1-near ring merupakan bentuk khusus dari near ring sebagai mana diberikan dalam definisi berikut

Definisi 4 *Near ring* $(N, +, \cdot)$ *disebut B_1 – near ring jika untuk setiap* $a \in N$*, terdapat* $x \in N \setminus \{0\}$ *sedemikian sehingga* $Nxa = Nax$*.*

Selanjutnya diberikan teorema yang menjelaskan syarat cukup agar sebuah near ring merupakan B_1-near ring sebagai mana diberikan dalam teorema berikut:

Teorema 5 *Jika* $(N, +, \cdot)$ *merupakan near ring dengan elemen satuan, maka N merupakan B_1-near ring*

Bukti :

Diberikan near ring $(N, +, \cdot)$ merupakan near ring dengan elemen satuan 1. Dibuktikan bahwa $(N, +, \cdot)$ merupakan B_1-near ring. Diambil sebarang $a \in N$, terdapat $1 \in N$ sedemikian hingga $N.1.a = N.a.1 = Na$. Jadi terbukti N merupakan B_1-near ring. ■

2. Obyek Kogrup

Obyek kogrup dapat dikatakan dual dari obyek grup. Dalam obyek grup harus terpenuhi sifat-sifat yang menyerupai aksioma grup yaitu asosiatif, eksistensi elemen netral dan eksistensi elemen invers. Sedangkan dalam obyek kogrup sifat yang harus dimiliki adalah koasosiatif, eksistensi elemen koidentitas dan eksistensi elemen koinvers. Penjelasan definisi kogrup dituliskan dalam bentuk bagan dan didefinisikan secara kategoris sedemikian hingga untuk mempelajari bagian ini pembaca terlebih dahulu harus memahami konsep kategori dan fungtor terutama pengertian tentang obyek inisial dan koproduk.

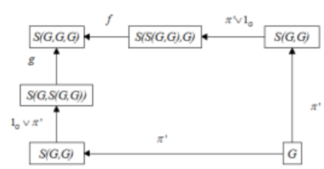
Syarat yang harus dimiliki agar suatu kategori $\mathscr{C}$ mempunyai obyek kogrup adalah koproduk dan obyek inisial I, dimana untuk sebarang $X, Y \in |\mathscr{C}|$, $\left(S\left(X, Y\right), e_1, e_2\right)$ merupakan notasi untuk koproduk dari X dan Y. Sedangkan aksioma yang harus dipenuhi suatu obyek kogrup adalah sebagai berikut:

1. Koasosiatif

Akan didefinisikan dual dari sifat assosiatif. Diberikan morfisma $\pi' : Hom\left(G, \left(S\left(G, G\right)\right)\right)$, dan diambil sebarang morfisma $f = \left(\left(e_1, e_2\right), e_3\right)$ dan $g = \left(e_1, \left(e_2, e_3\right)\right)$, dengan $e_i : G \to S\left(G, G, G\right)$, untuk $i = 1, 2, 3$.

$$f = \left(\left(e_1, e_2\right), e_3\right) : S\left(S\left(G, G\right), G\right) \to S\left(G, G, G\right), \text{dan}$$
$$g = \left(e_1, \left(e_2, e_3\right)\right) : S\left(G, S\left(G, G\right)\right) \to S\left(G, G, G\right)$$

Dipenuhi diagram komutatif untuk sifat koassosiatifnya sebagai berikut :



Gambar 1. Diagram Koasosiatif

Yaitu dipenuhi bahwa $f \circ \left(\pi' \vee 1_G\right) \circ \pi' = g \circ \left(1_G \vee \pi'\right) \circ \pi'$. Atau dengan kata lain untuk setiap $a \in G$, dengan f dan g merupakan fungsi yang terpartisi dalam bentuk $f = \left(\left(e_1, e_2\right), e_3\right)$ dan $g = \left(e_1, \left(e_2, e_3\right)\right)$, maka berlaku :

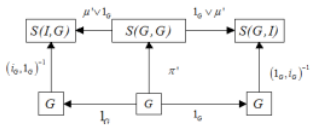
$$\left(f \circ \left(\pi' \vee 1_G\right) \circ \pi'\right)\left(a\right) = \left(f \circ \left(\pi' \vee 1_G\right)\right)\pi'\left(a\right) = \left(f \circ \left(\pi' \vee 1_G\right)\right)\left(a_1, a_2\right)$$
$$= f\left(\left(\pi' \vee 1_G\right)\left(a_1, a_2\right)\right) = f\left(\left(a_{11}, a_{12}\right), a_2\right) = \left(a_{11}, a_{12}, a_2\right),$$

$$\left(g \circ \left(1_G \vee \pi'\right) \circ \pi'\right)\left(a\right) = \left(g \circ \left(1_G \vee \pi'\right)\right)\left(\pi'\left(a\right)\right) = \left(g \circ \left(1_G \vee \pi'\right)\right)\left(a_1, a_2\right)$$
$$= g\left(\left(1_G \vee \pi'\right)\left(a_1, a_2\right)\right) = g\left(a_1, \left(a_{21}, a_{22}\right)\right) = \left(a_1, a_{21}, a_{22}\right).$$

Sehingga harus dipenuhi bahwa $\left(a_{11}, a_{12}, a_2\right) = \left(a_1, a_{21}, a_{22}\right)$.

2. Eksistensi elemen koidentitas

Untuk mencari elemen koidentitasnya, dibutuhkan diagram berikut :



Gambar 2. Diagram Koidentitas

Harus dipenuhi bahwa

$(\mu'\vee 1_G)\circ\pi' = (i_G,1_G)^{-1}$ dan $(1_G\vee\mu')\circ\pi' = (1_G,i_G)^{-1}$

Artinya , untuk setiap $(g_1,g_2)\in S(G,G)$ terdapat $i\in I$, sehingga

$((\mu'\vee 1_G)\circ\pi')(g) = (\mu'\vee 1_G)(\pi'(g))$

$= (\mu'\vee 1_G)(g_1,g_2) = (i,g_2)$

$= (i,g) = (i_G,1_G)^{-1}(g)$

$((1_G\vee\mu')\circ\pi')(g) = (1_G\vee\mu')(\pi'(g))$

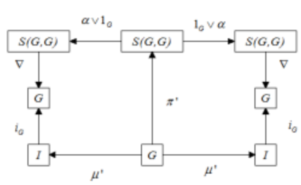
$= (1_G\vee\mu')(g_1,g_2)$

$= (g_1,i) = (g,i) = (1_G,i_G)^{-1}(g)$

Dari sini harus dipenuhi bahwa untuk setiap $g\in G$, dengan $\pi'(g) = (g_1,g_2)$, maka $(g,i) = (g_1,i)$ dan $(i,g) = (i,g_2)$.

3. Eksistensi elemen koinvers

Selanjutnya akan dijelaskan eksistensi elemen koinversnya. Jika diberikan $\alpha = Hom(G,G)$, yaitu untuk setiap $g\in G$, $\alpha(g) = g^{-1}\in G$, dipenuhi diagram komutatif berikut.



Gambar 3. Diagram Koinvers

Atau dengan kata lain dipenuhi bahwa :

$$\nabla\circ(\alpha\vee 1_G)\circ\pi' = i_G\circ\mu' = \nabla\circ(1_G\vee\alpha)\circ\pi'$$

Artinya untuk setiap $g\in G$, dengan $\pi'(g) = (g_1,g_2)\in S(G,G)$, terdapat (g_1^{-1},g_2) dan (g_1,g_2^{-1}), sehingga

$(\nabla\circ(\alpha\vee 1_G)\circ\pi')(g) = (\nabla\circ(\alpha\vee 1_G))(\pi'(g))$

$= (\nabla\circ(\alpha\vee 1_G))(g_1,g_2) = \nabla(g_1^{-1},g_2) = g'$

$(\nabla\circ(1_G\vee\alpha)\circ\pi')(g) = (\nabla\circ(1_G\vee\alpha))(\pi'(g))$

$= (\nabla\circ(1_G\vee\alpha))(g_1,g_2) = \nabla(g_1,g_2^{-1}) = g'$

dimana $(i_G\circ\mu')(g) = i_G(\mu'(g)) = i_G(i) = g'$.

Dari penjelasan-penjelasan yang telah dijabarkan, diperoleh definisi tentang obyek kogrup sebagai berikut :

Definisi 6 *Diberikan kategori $\mathscr{C}$, $A,B\in|\mathscr{C}|$, dan obyek Terminal I. Koproduk dari A dan B dinotasikan dengan $S(A,B)$.* ***Obyek kogrup*** *adalah quadruple (G,π',μ',α), dengan $G\in|\mathscr{C}|$, $\pi'\in Hom(G,S(G,G))$, $\mu'\in Hom(G,I)$, $\alpha\in Hom(G,G)$, dan Diagram 2.1, Diagram 2.2 dan Diagram 2.3) adalah diagram yang komutatif.*

Teorema 7 *Diberikan obyek kogrup (G,π',μ',α) pada kategori $\mathscr{C}$, untuk suatu $X\in|\mathscr{C}|$, didefinisikan operasi "$\oplus$" untuk $Hom(G,X)$, yaitu jika diambil sebarang $f,g\in Hom(G,X)$, maka $f\oplus g = (f,g)\circ\pi'$. Sehingga $Hom(G,X)$ merupakan grup terhadap operasi "$\oplus$", dengan elemen identitasnya $i_X\circ\mu'$, dan elemen inversnya $-f = f\circ\alpha$.*

Bukti : (Nikken dkk, 2007)

Untuk membuktikan $(Hom(G,X),\oplus)$ grup, maka harus dipenuhi aksioma - aksioma sebagai berikut :

1. Tertutup terhadap operasi "$\oplus$".

Diambil sebarang $f,g\in Hom(G,X)$, dan $\pi': G\to S(G,G)$. Akan ditunjukkan bahwa $f\oplus g\in Hom(G,X)$. Yaitu jika diambil sebarang $a\in G$, diperoleh bahwa :

$$\begin{aligned}(f \oplus g)(a) &= ((f,g)\circ \pi')(a) = (f,g)(\pi'(a)) \\ &= (f,g)(a_1,a_2) = (f(a_1), g(a_2)).\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $(f(a_1), g(a_2)) \in S(X,X)$, untuk membawanya ke sebuah elemen didalam X, perlu dilihat kembali bahwa pasti dapat dibentuk suatu aturan fungsi $1_X \vee \mu'_X : S(X,X) \to S(X,I)$ dan $\mu'_X \vee 1_X : S(X,X) \to S(I,X)$, sehingga untuk setiap anggota di $S(X,X)$ oleh fungsi tersebut pasti dapat dibawa ke sebuah elemen didalam $S(X,I)$ dan $S(I,X)$. Karena fungsi dari $S(X,X)$ ke $S(X,I)$ dan $S(X,X)$ ke $S(I,X)$ selalu dapat didefinisikan, maka untuk operasi "$\oplus$" pada $Hom(G,X)$ dapat dipandang dengan aturan komposisi fungsi sebagai berikut :

$$f \oplus g = (f,g)\circ \pi' : G \to S(G,G) \to S(X,X) \to S(X,I) \cong X,$$

dan

$$f \oplus g = (f,g)\circ \pi' : G \to S(G,G) \to S(X,X) \to S(I,X) \cong X.$$

Oleh karena $S(X,I) \cong X$ dan $S(I,X) \cong X$. Sehingga jika diambil sebarang $a \in G$ diperoleh bahwa :

$$\begin{aligned}(f \oplus g)(a) &= ((f,g)\circ \pi')(a) = (f,g)(\pi'(a)) \\ &= (f,g)(a_1,a_2) = (f(a_1), g(a_2)) \\ &= (f(a_1), i) = f(a_1),\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}(f \oplus g)(a) &= ((f,g)\circ \pi')(a) = (f,g)(\pi'(a)) \\ &= (f,g)(a_1,a_2) = (f(a_1), g(a_2)) \\ &= (i, g(a_2)) = g(a_2).\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $(f(a_1), g(a_2)) \in S(X,X)$, dan dengan aturan yang sudah dijelaskan diperoleh bahwa $f(a_1), g(a_2) \in X$.

Dengan demikian terbukti $Hom(G,X)$ tertutup terhadap operasi "$\oplus$".

2. Asosiatif

Diambil sebarang $f, g, h \in Hom(G,X)$, dan $a \in G$, maka berlaku :

$$\begin{aligned}((f \oplus g)\oplus h)(a) &= (((f,g)\circ \pi')\oplus h)(a) = (((f \oplus g)\circ \pi', h)\circ \pi')(a) \\ &= ((f,g)\circ \pi', h)\pi'(a) = ((f,g)\circ \pi', h)(a_1,a_2) \\ &= ((f,g)(\pi'(a_1)), h(a_2)) = ((f,g)(a_{11},a_{12}), h(a_2)) \\ &= ((f(a_{11}), g(a_{12})), h(a_2)) = (f(a_{11}), (g(a_{12}), h(a_2)))\end{aligned}$$

Karena G adalah obyek kogrup, maka dari sifat koasosiatifnya harus dipenuhi bahwa $(a_{11}, a_{12}, a_2) = (a_1, a_{21}, a_{22})$, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}((f \oplus g)\oplus h)(a) &= (f(a_{11}), (g(a_{12}), h(a_2))) = (f(a_{11}), (g,h)(a_{12},a_2)) \\ &= (f(a_1), (g,h)(a_{21},a_{22})) = (f(a_1), (g,h)\circ \pi'(a_2)) \\ &= (f, (g,h)\circ \pi')(a_1,a_2) = (f, (g,h)\circ \pi')\circ(a) \\ &= (f \oplus (g \oplus h))(a).\end{aligned}$$

Terbukti $Hom(G,X)$ memenuhi sifat koassosiatif terhadap operasi "$\oplus$".

3. Eksistensi elemen identitas

Diambil sebarang $f \in Hom(G,X)$, $\mu' : G \to I$, dengan

$$\begin{aligned} i_x \circ \mu' : G &\to I \to X \\ a &\mapsto i \mapsto o \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa $i_X \circ \mu'$ adalah elemen identitas untuk $Hom(G,X)$. Yaitu untuk sebarang $f \in Hom(G,X)$, akan dibuktikan $f \oplus (i_X \circ \mu') = (f, o)$ dan $(i_X \circ \mu') \oplus f = (o, f)$.

Diambil sebarang $a \in G$, maka

$$\begin{aligned}(f \oplus (i_X \circ \mu'))(a) &= ((f, (i_X \circ \mu'))\circ \pi')(a) = (f, (i_X, \mu'))(a_1, a_2) \\ &= (f(a_1), (i_X \circ \mu')(a_2)) = (f(a_1), i_X(\mu'(a_2))) \\ &= (f(a_1), i_X(i)) = (f(a_1), o)\end{aligned}$$

Karena G adalah obyek kogrup, maka dari sifat koidentitasnya harus dipenuhi bahwa $(f(a_1), o) = (f(a), o)$, sehingga diperoleh

$$(f \oplus (i_X \circ \mu')) = (f(a_1), o) = (f(a), o) = (f, o)(a) \quad \text{(i)}$$

Kemudian diperoleh juga untuk sisi yang lain, yaitu :

$$\begin{aligned}\left(\left(i_X\circ\mu'\right)\underline{\oplus} f\right)(a) &= \left(\left(\left(i_X\circ\mu'\right),f\right)\circ\pi'\right)(a)=\left(\left(i_X,\mu'\right),f\right)\left(a_1,a_2\right)\\ &= \left(\left(i_X\circ\mu'\right)\left(a_1\right),f\left(a_2\right)\right)=\left(i_X\left(\mu'\left(a_1\right)\right),f\left(a_2\right)\right)\\ &= \left(i_X\left(i\right),f\left(a_2\right)\right)=\left(o,f\left(a_2\right)\right)\end{aligned}$$

Karena G adalah obyek kogrup, maka dari sifat koidentitasnya $\left(o,f\left(a_2\right)\right)=\left(o,f\left(a\right)\right)$, sehingga diperoleh bahwa $\left(\left(i_X\circ\mu'\right)\oplus f\right)=\left(o,f\left(a_2\right)\right)=\left(o,f\left(a\right)\right)=\left(o,f\right)\left(a\right)$ (ii)

Dari (i) dan (ii) terbukti $i_X\circ\mu'$ adalah elemen identitas $Hom(G,X)$ terhadap operasi "$\underline{\oplus}$".

4. Eksistensi elemen invers
   Diambil sebarang $f\in Hom(G,X)$.
   Akan ditunjukkan bahwa $f\circ\alpha$ adalah elemen invers untuk $Hom(G,X)$, sehingga harus dipenuhi bahwa :

   $f\oplus(f\circ\alpha)=(i_X\circ\mu')$ dan $(f\circ\alpha)\underline{\oplus} f=(i_X\circ\mu')$.

   Selain itu, karena G adalah obyek kogrup, dari sifat koinversnya harus dipenuhi
   $\left(f\left(a_1\right),f\left(-a_2\right)\right)=o$ dan $\left(f\left(-a_1\right),f\left(a_2\right)\right)=o$.
   Sehingga jika diambil sebarang $a\in G$, berlaku :

$$\begin{aligned}\left(f\underline{\oplus}(f\circ\alpha)\right)(a) &= \left(\left(f,(f\circ\alpha)\right)\circ\pi'\right)(a)=\left(f,(f\circ\alpha)\right)\pi'(a)\\ &= \left(f,(f\circ\alpha)\right)\left(a_1,a_2\right)=\left(f\left(a_1\right),(f\circ\alpha)\left(a_2\right)\right)\\ &= \left(f\left(a_1\right),f\left(\alpha\left(a_2\right)\right)\right)=\left(f\left(a_1\right),f\left(-a_2\right)\right)=o=\left(i_X\circ\mu'\right)(a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left((f\circ\alpha)\underline{\oplus} f\right)(a) &= \left(\left((f\circ\alpha)\underline{\oplus} f\right)\circ\pi'\right)(a)=\left((f\circ\alpha),f\right)\pi'(a)\\ &= \left((f\circ\alpha),f\right)\left(a_1,a_2\right)=\left((f\circ\alpha)\left(a_1\right),f\left(a_2\right)\right)\\ &= \left(f\left(\alpha\left(a_1\right)\right),f\left(a_2\right)\right)=\left(f\left(-a_1\right),f\left(a_2\right)\right)=o=\left(i_X\circ\mu'\right)(a).\end{aligned}$$

   Terbukti $f\circ\alpha$ adalah elemen invers $Hom(G,X)$ terhadap operasi "$\underline{\oplus}$".

Dari 1, 2, 3, dan 4 terbukti $\left(Hom(G,X),\underline{\oplus}\right)$ grup.■

Akibat 8 *Jika* (G,π',μ',α) *merupakan obyek kogrup, maka* $\left(Hom(G,G),\underline{\oplus}\right)$ *merupakan grup.*

Bukti :
Pada Teorema 7 telah dibuktikan bahwa $\left(Hom(G,X)\underline{\oplus}\right)$ grup, dengan mengambil kejadian khusus yaitu jika diambil $X=G$, maka akan diperoleh $\left(Hom(G,G),\underline{\oplus}\right)$ merupakan grup. ■

Teorema 9 *Diberikan obyek kogrup* (G,π',μ',α) *atas kategori* $\mathscr{C}$ *, dan* $X\in|\mathscr{C}|$. *Untuk sebarang* $f\in Hom(G,X)$, *dan* $g_1,g_2\in Hom(G,G)$, *berlaku:*

1. $f\circ\left(g_1\oplus g_2\right)=\left(f\circ g_1\right)\underline{\oplus}\left(f\circ g_2\right)$.
2. $f\circ\left(g_1\circ g_2\right)=\left(f\circ g_1\right)\circ g_2$.
3. $f\circ 1_G=f$.

Bukti :
Diambil sebarang $a\in X$, didapat :

$$\begin{aligned}1.\ \left(f\circ\left(g_1\oplus g_2\right)\right)(a) &= f\left(\left(\left(g_1,g_2\right)\circ\pi'\right)(a)\right)\\ &= f\left(\left(g_1,g_2\right)\left(\pi'(a)\right)\right)\\ &= f\left(g_1,g_2\right)\left(a_1,a_2\right)\\ &= f\left(g_1\left(a_1\right),g_2\left(a_2\right)\right)\\ &= \left(f\circ g_1\left(\left(a_1\right)\right),f\circ g_2\left(\left(a_2\right)\right)\right)\\ &= \left(f\circ g_1,f\circ g_2\right)\left(a_1,a_2\right)\\ &= \left(f\circ g_1,f\circ g_2\right)\left(\pi'(a)\right)\\ &= \left(\left(f\circ g_1,f\circ g_2\right)\circ\pi'\right)(a)\\ &= \left(\left(f\circ g_1\right)\underline{\oplus}\left(f\circ g_2\right)\right)(a)\end{aligned}$$

Terbukti $f\circ\left(g_1\oplus g_2\right)=\left(f\circ g_1\right)\underline{\oplus}\left(f\circ g_2\right)$.

$$\begin{aligned}2.\ \left(f\circ\left(g_1\circ g_2\right)\right)(a) &= \left(f\left(\left(g_1\circ g_2\right)(a)\right)\right)\\ &= \left(f\left(g_1\left(g_2(a)\right)\right)\right)\\ &= \left(\left(f\left(g_1\right)\right)g_2(a)\right)\\ &= \left(\left(f\circ g_1\right)g_2(a)\right)\\ &= \left(\left(f\circ g_1\right)\circ g_2\right)(a)\end{aligned}$$

Terbukti $\left(g_1\circ g_2\right)\circ f=g_1\circ\left(g_2\circ f\right)$.

$$3.\ \left(f\circ 1_G\right)(a)=f\left(1_G(a)\right)=f(a)$$

Terbukti $f\circ 1_G=f$. □

Akibat 10 *Untuk setiap obyek kogrup* (G,π',μ',α) *atas kategori* $\mathscr{C}$ *,* $(Hom(G,G),\oplus,\circ)$ *adalah near ring kiri.*

Bukti :

Dari Akibat 8 terbukti $(Hom(G,G),\oplus)$ merupakan grup. Berdasarkan Teorema 9 dengan mengambil kejadian khusus yaitu $X = G$, untuk obyek kogrup (G,π',μ',α) atas kategori $\mathscr{C}$ diperoleh bahwa jika diambil sebarang $f \in Hom(G,G)$, dan $g_1, g_2 \in Hom(G,G)$, menurut Teorema 9 bagian 2, maka $Hom(G,G)$ tertutup dan asosiatif terhadap operasi "$\circ$". Dan dari Teorema 9 bagian 1, dipenuhi sifat distibutif kiri yaitu : $f\circ(g_1 \oplus g_2) = (f\circ g_1)\oplus(f\circ g_2)$. Dengan demikian terbukti bahwa untuk (G,π',μ',α) obyek kogrup, maka $(Hom(G,G),\oplus,\circ)$ adalah near ring kiri. ■

Akibat 11 *Near ring kiri* $(Hom(G,G),\oplus,\circ)$ *merupakan B_1* –near ring.

Bukti :

Dari Akibat 10 telah dijelaskan bahwa $(Hom(G,G),\oplus,\circ)$ merupakan near ring kiri, berdasarkan Teorema 9 bagian 3 untuk setiap $f \in Hom(G,G)$ terdapat $1_G \in Hom(G,G)$ sedemikian hingga $f\circ 1_G = 1_G \circ f = f$ atau dengan kata lain $1_G \in Hom(G,G)$ merupakan elemen satuan di $(Hom(G,G),\oplus,\circ)$. Lebih lanjut berdasarkan Teorema 5 diperoleh bahwa $(Hom(G,G),\oplus,\circ)$ merupakan B_1 – near ring.■

C. PENUTUP

Simpulan

Dari sebuah obyek kogrup G dapat dikonstruksikan near ring, yaitu near ring dari himpunan endomorfisma dari G ke G terhadap operasi biner $\oplus$ dan $\circ$ dinotasikan dengan $(Hom(G,G),\oplus,\circ)$. Oleh karena telah ditunjukkan bahwa $Hom(G,G)$ memuat elemen satuan yaitu 1_G maka dapat diperlihatkan bahwa near ring $(Hom(G,G),\oplus,\circ)$ merupakan *B_1*-near ring.

D. DAFTAR PUSTAKA

Adamek, J., Herrlich, H., dan Streckter, George E. 2004. *Abstract and Concrete Categories : The joy of Cats*. Boston : Free Software Foundation.

Balakhrisnam, R., Silviya, S., Chelvam, T., Thamizh. 2011. B_1 near-ring, *International Journal of Algebra.* 5(5):199-205.

Clay, J., R., 1994. Some Applications of Nearrings, Rings and Radicals, *Proceedings of the Internationals Conferencee*, Shijiazhuang.

Nikken Prima Puspita. 2007. Skripsi : Pembentukan Near Ring dari Obyek Grup dan Kogrup suatu Kategori. Universitas Gadajah Mada. Yogyakarta

Pilz, G. 1983. *Near-ring: The Theory and its Application*. North Holland. Amsterdam.

Pareigis, Bodo. 1970. *Categories and Functors*. Newyork : Academic Press.

Schubert, Horst. 1972. *Categories*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

HIMPUNAN ENDOMORFISMA DARI OBYEK KOGRUP SUATU KATEGORI SEBAGAI B1-NEAR RING

ORIGINALITY REPORT

19%	14%	16%	5%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	anzdoc.com Internet Source	1%
2	issuu.com Internet Source	1%
3	Bernard Roynette. "Feynman-Kac penalisations for Brownian motion", Lecture Notes in Mathematics, 2009 Publication	1%
4	www.closecombatseries.net Internet Source	1%
5	docplayer.gr Internet Source	1%
6	cdpp.irap.omp.eu Internet Source	1%
7	stuff.mit.edu Internet Source	1%
8	Giraldes, E.. "F-regular semigroups", Journal of Algebra, 20040415 Publication	1%

9	doczz.biz.tr Internet Source	1 %
10	www.nrri.ohio-state.edu Internet Source	1 %
11	Mirella Lapata. "Web-based models for natural language processing", ACM Transactions on Speech and Language Processing, 2/1/2005 Publication	1 %
12	Fu, . "Etale Cohomology", Nankai Tracts in Mathematics, 2011. Publication	1 %
13	ijetst.in Internet Source	1 %
14	pt.scribd.com Internet Source	1 %
15	Chern, S.. "Dirac Induction for Unimodular Lie Groups", Journal of Functional Analysis, 19970201 Publication	<1 %
16	Submitted to Texas A&M University, College Station Student Paper	<1 %
17	omegamotor.com.tr Internet Source	<1 %

18	Lecture Notes in Computer Science, 2005. Publication	<1%
19	James Gillespie. "The derived category with respect to a generator", Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -), 2014 Publication	<1%
20	ir.cwi.nl Internet Source	<1%
21	unwise.me Internet Source	<1%
22	www.theses.fr Internet Source	<1%
23	Brendan Sheehan. "A relation based measure of semantic similarity for Gene Ontology annotations", BMC Bioinformatics, 2008 Publication	<1%
24	adoc.pub Internet Source	<1%
25	Brooke Feigon, Erez Lapid, Omer Offen. "On representations distinguished by unitary groups", Publications mathématiques de l'IHÉS, 2012 Publication	<1%
26	Ratje Reimers, Jürgen Tappe. "Autoclinisms and automorphisms of finite groups", Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2009	<1%

Publication

27	alioth.uwb.edu.pl Internet Source	<1 %
28	research-repository.st-andrews.ac.uk Internet Source	<1 %
29	Lisa Kierans. "The Belavin-Drinfeld theorem on non-degenerate solutions of the classical Yang-Baxter equation", Journal of Physics Conference Series, 02/09/2012 Publication	<1 %
30	cs.nju.edu.cn Internet Source	<1 %
31	documents.tips Internet Source	<1 %
32	www.ms.uky.edu Internet Source	<1 %
33	Johan Håstad. "Some optimal inapproximability results", Journal of the ACM, 7/1/2001 Publication	<1 %
34	docplayer.info Internet Source	<1 %
35	Trends in Logic, 2014. Publication	<1 %

36	Andreas Huck, Eberhard Triesch. "Perfect Matchings in Balanced Hypergraphs - A Combinatorial Approach", Combinatorica, 2002 Publication	<1 %
37	EDGAR E. ENOCHS. "Compact coGalois groups", Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 03/2000 Publication	<1 %
38	I. Elishakoff, E. Archaud. "Modified Monte Carlo method for buckling analysis of nonlinear imperfect structures", Archive of Applied Mechanics, 2013 Publication	<1 %
39	S. A. Il'chenko. "Generalized two-parameter Lebesgue-Stieltjes integrals and their applications to fractional Brownian fields", Ukrainian Mathematical Journal, 04/2004 Publication	<1 %
40	Suohai Fan. "Generalized symmetry of graphs — A survey", Discrete Mathematics, 2009 Publication	<1 %
41	uas201142041.wordpress.com Internet Source	<1 %

Exclude quotes	On	Exclude matches	Off
Exclude bibliography	On		

HIMPUNAN ENDOMORFISMA DARI OBYEK KOGRUP SUATU KATEGORI SEBAGAI B1-NEAR RING

GRADEMARK REPORT

FINAL GRADE

/0

GENERAL COMMENTS

Instructor

PAGE 1

PAGE 2

PAGE 3

PAGE 4

PAGE 5

PAGE 6

PAGE 7