Posisi Integral Henstock-Dunford dan Integral Henstock-Bochner pada [a,b]

by Solikhin Solikhin

Submission date: 13-Apr-2023 11:46AM (UTC+0700)
Submission ID: 2063207958
File name: i_Integral_Henstock-Dunford_dan_Integral_Henstock-_organized.pdf (376.29K)
Word count: 3323
Character count: 17001

A-14

Posisi Integral Henstock-Dunford dan Integral Henstock-Bochner pada [a,b]

Solikhin, Heru Tjahjana, Solichin Zaki

Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
soli_erf@yahoo.com

***Abstrak*—**Pada paper ini dibahas integral Henstock-Dunford, integral Henstock-Bochner, dan integral Henstock Lemah pada [a,b] beserta sifat-sifat sederhananya. Selanjutnya dikaji posisi integral Henstock-Dunford terhadap integral Henstock-Bochner dan integral Henstock lemah. Diperoleh bahwa setiap fungsi yang terintegral Henstock-Bochner maka fungsi tersebut juga terintegral Henstock-Dunford, sebaliknya belum tentu berlaku dengan diberikan contohnya. Jika syarat integral Henstock-Bochner diperlemah menjadi integral Henstock Lemah maka diperoleh bahwa integral Henstock-Dunford ekuivalen dengan integral Henstock Lemah.

Kata kunci: Integral Henstock-Dunford, Henstock-Bochner

I. PENDAHULUAN

Integral Henstock merupakan integral tipe Riemann yang didefinisikan berdasarkan partisi Perron δ-fine. Integral ini banyak dikaji oleh para pemerhati teori integral baik dari segi teorinya [1, 2, 3, 4] maupun aplikasinya [5, 6, 7]. Kajian teori integral Henstock telah diperluas dan dikombinasikan dengan integral-integral jenis lain, salah satunya adalah integral Henstock-Dunford.

Integral Henstock-Dunford adalah integral Dunford yang diperluas ke dalam integral Henstock. Integral Dunford didefinisikan sebagai fungsi terukur lemah f dari interval tertutup I ke ruang Banach X ($f: I \to X$) sedemikian sehingga untuk setiap $x^* \in X^*$ (X^* adalah ruang dual X) fungsi bernilai real $x^* f: I \to R$ terintegral Lebesgue [8]. Jaminan untuk integral ini adalah Lemma Dunford [8]. Kemudian intergral Dunford diperluas ke dalam integral Henstock, yaitu fungsi bernilai real $x^* f$ -nya diperumum dari integral Lebesgue menjadi integral Henstock. Integral ini dikenal sebagai integral Henstock-Dunford [9].

Kajian integral Henstock-Dunford pada ruang dimensi satu R telah digeneralisasi ke dalam ruang Euclide R^n [10]. Kajian integral Henstock-Dunford pada R sejauh ini sebatas sifat-sifat sederhana, Teorema Perluasan Harnack dan Teorema kekonvergenan [9]. Kajian lebih lanjut dibahas perluasan Harnack dan sifat Cauchy dalam ruang Euclide R^n [11], dan beberapa sifat-sifat small Riemann sumsnya yaitu locally, globally, functionally, dan essentially small Riemann sumsnya [12, 13, 14]. Kemudian dikaji juga tentang sifat fungsi primitifnya terkait dengan sifat fungsi kontinu mutlak, fungsi kontinu mutlak kuat, dan generalisasinya, serta kaitannya sifat fungsi bervariasi terbatas, bervariasi terbatas kuat, dan generalisasinya [15]. Kajian selanjutnya adalah kekonvergenan barisan fungsi terintegral Henstock-Dunford pada [a,b], [16].

Topik terkait integral Henstock-Dunford menjadi kajian yang menarik bagi penulis. Berdasarkan kajian tentang integral Henstcok-Dunford yang sudah ada, penulis akan mengkaji posisi dari integral Henstock-Dunford terhadap integral Henstock-Bochner dan integral Henstock Lemah. Penulis akan menyelidiki hubungannya dalam ruang fungsi. Apakah setiap fungsi yang terintegral Henstock-Bochner juga terintegral Henstock-Dunford atau sebaliknya. Jika mereka tidak ekuivalen, syarat apa yang harus ditambahkan atau dikurangi sehingga mereka ekuivalen.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada tulisan ini, diberikan definisi dan sifat-sifat dari masing-masing integral Henstock-Bochner, Henstock Lemah, dan Henstock-Dunford pada [a,b]. Kemudian dikaji hubungan antara integral Henstock-Dunford dengan integral Henstock-Bochner dan integral Henstock Lemah.

ISBN. 978-602-73403-1-2

A. *Integral Henstock-Bochner, Integral Henstock Lemah, dan Integral Henstock-Dunford pada [a,b]*

Misalkan X ruang Banach, X^* ruang dualnya dan X^{**} ruang dual keduanya serta $[a,b]$ interval tertutup dalam R . Jika $A=[c,d]\subset[a,b]$ maka simbol $\alpha(A)$ dalam tulisan ini dimaksudkan sebagai $\alpha(A)=|d-c|$, panjang interval tertutup A .

Definisi 2.1.1. [8] *Fungsi* $f:[a,b]\to X$ *dikatakan terintegral Henstock-Bochner pada* $[a,b]$, *ditulis singkat* $f\in HB[a,b]$, *jika ada vektor* $L\in X$ *sehingga untuk setiap bilangan* $\varepsilon>0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *dan untuk setiap partisi Perron δ-fine* $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ *pada* $[a,b]$ *berlaku*

$$\left\|L-\mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D)\right\|_X<\varepsilon .$$

Jika fungsi *f* terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ maka vektor *L* dalam Definisi 2.1.1 adalah tunggal dan ditulis

$$L=(HB)\int_a^b f .$$

Teorema 2.1.2. [17] *Jika* $f\in HB[a,b]$ *maka vektor L dalam Definisi 2.1.1 adalah tunggal.*

Bukti: Andaikan terdapat vektor $L_1\in X$ dan $L_2\in X$ maka

$$L_1=(HB)\int_a^b f \text{ dan } L_2=(HB)\int_a^b f .$$

Oleh karena itu

$$L_1-L_2=(HB)\int_a^b f-(HB)\int_a^b f=0 .$$

Jadi $L_1=L_2$. □

Himpunan fungsi yang terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ merupakan ruang linear.

Teorema 2.1.3. [17] *Jika* $f\in HB[a,b]$ *dan* $g\in HB[a,b]$ *dan untuk sebarang skalar* $c\in R$ *maka* $cf\in HB[a,b]$ *dan* $f+g\in HB[a,b]$.

Bukti: (i) Diketahui $f\in HB[a,b]$ berarti ada vektor $L_1=(HB)\int_a^b f$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ_1 pada $[a,b]$ dan untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D}_1=\{(D,x)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left\|\mathcal{D}_1\sum f(x)\alpha(D)-(HB)\int_a^b f\right\|_X<\frac{\varepsilon}{4} .$$

Karena $g\in HB[a,b]$ berarti ada vektor $L_2=(HB)\int_a^b g$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ_2 pada $[a,b]$ dan untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D}_2=\{(C,x)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left\|\mathcal{D}_2\sum f(x)\alpha(C)-(HB)\int_a^b g\right\|_X<\frac{\varepsilon}{4} .$$

Dibentuk $\delta(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$ untuk setiap $x\in[a,b]$. Diperoleh δ fungsi positif pada $[a,b]$.

Jadi untuk sebarang $\mathcal{P}=\{(P,x)\}$ partisi Perron $\delta-$fine pada $[a,b]$ juga merupakan partisi Perron δ_k-fine $(k=1,2)$ pada $[a,b]$.

Dengan demikian diperoleh

$$\left\|\mathcal{P}\sum(f+g)(x)\alpha(P)-\left((HB)\int_a^b f+(HB)\int_a^b g\right)\right\|_X\le\left\|\mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-(HB)\int_a^b f\right\|_X$$

$$+\left\| \mathcal{P}\sum g(x)\alpha(P)-(HB)\int_a^b g \right\|_X < \varepsilon .$$

Jadi $f+g \in HB[a,b]$ dan $(HB)\int_a^b f+g=(HB)\int_a^b f+(HB)\int_a^b g$.

(ii) Diberikan sebarang skalar $c \in R$ dan diketahui $f \in HB[a,b]$.

Karena $f \in HB[a,b]$ berarti ada vektor $L_1=(HB)\int_a^b f$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ_1 pada $[a,b]$ dan untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D}_1=\{(D,x)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left\| \mathcal{D}_1\sum f(x)\alpha(D)-(HB)\int_a^b f \right\|_X < \frac{\varepsilon}{|c|+4} .$$

Dengan demikian untuk $c \in R$ di atas diperoleh

$$\left\| \mathcal{D}_1\sum cf(x)\alpha(D)-c(HB)\int_a^b f \right\|_X \le |c| \left\| \mathcal{D}_1\sum f(x)\alpha(D)-(HB)\int_a^b f \right\|_X < |c|\frac{\varepsilon}{|c|+4} < \varepsilon .$$

Jadi $cf \in HB[a,b]$ dan $(HB)\int_a^b cf = c(HB)\int_a^b f$.

Jadi, terbukti bahwa $HB[a,b]$ merupakan ruang linear. □

Teorema 2.1.4. [17] (Teorema Cauchy) *Fungsi $f \in HB[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $\mathcal{P}=\{(P,x)\}$ dan $\mathcal{Q}=\{(Q,x)\}$ partisi Perron $\delta-$fine pada $[a,b]$ berlaku*

$$\left\| \mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-\mathcal{Q}\sum f(x)\alpha(Q) \right\|_X < \varepsilon .$$

Bukti: [15] □

Teorema 2.1.5. [17] *Jika $f \in HB[a,b]$ maka $f \in HB[c,d]$ untuk setiap interval tertutup $[c,d] \subset [a,b]$.*

Bukti: Diambil $[c,d] \subset [a,b]$ sebarang interval tertutup. Karena $f \in HB[a,b]$ maka menurut Teorema Cauchy, untuk sebarang bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $\mathcal{P}=\{(P,x)\}$ dan $\mathcal{Q}=\{(Q,x)\}$ masing-masing partisi Perron $\delta-$fine pada $[a,b]$ berlaku

$$\left\| \mathcal{P}\sum f(x)\alpha(P)-\mathcal{Q}\sum f(x)\alpha(Q) \right\|_X < \varepsilon .$$

Diambil $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ partisi Perron *δ-fine* pada $[c,d]$, $\mathcal{P}_1$ partisi Perron *δ-fine* pada $[a,c]$ dan $\mathcal{Q}_1$ partisi Perron *δ-fine* pada $[d,b]$.

Dibentuk $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{Q}_1$ dan $\mathcal{Q}' = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{Q}_1$.

Diperoleh $\mathcal{P}'$ dan $\mathcal{Q}'$ partisi Perron *δ-fine* pada $[a,b]$ sehingga

$$\left\| \mathcal{D}_1\sum f(x)\alpha(D_1)-\mathcal{D}_2\sum f(x)\alpha(D_2) \right\|_X = \left\| \mathcal{P}'\sum f(x)\alpha(P')-\mathcal{Q}'\sum f(x)\alpha(Q') \right\|_X < \varepsilon .$$

Menurut Teorema Cauchy, terbukti $f \in HB[c,d]$ untuk setiap $[c,d] \subset [a,b]$.

Teorema 2.1.6. [17] *Jika $f \in HB[a,b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f:[a,b] \to R$ terintegral Henstock pada $[a,b]$.*

Bukti: Karena $f \in HB[a,b]$, berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif $\delta>0$ pada $[a,b]$ dan untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left\| \mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D)-(HB)\int_a^b f \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Oleh karena itu untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

ISBN. 978-602-73403-1-2

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) - x^*(HB)\int_a^b f\right| \le \|x^*\|_X \left\|\mathcal{D}\sum f(x)\alpha(D) - (HB)\int_a^b f\right\|_X < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ pada $[a,b]$.

Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$, fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$. □

Teorema 2.1.7. [17] *Jika $x^* f : [a,b] \to R$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ maka $x^* f$ terintegral Henstock pada setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan*

$$(H)\int_A x^* f = (H)\int_a^b x^* f \chi_A . \square$$

Berikut ini diberikan definisi integral Henstock Lemah fungsi f dari interval tertutup $[a,b]$ ke ruang Banach X dan beberapa sifat dari integral Henstock Lemah.

Definisi 2.1.8. [17] *Fungsi $f : [a,b] \to X$ dikatakan terintegral Henstock Lemah pada $[a,b]$, ditulis $f \in HL[a,b]$, jika untuk setiap $x^* \in X^*$ ada bilangan $L_{x^*} \in R$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron $\delta -$ fine pada $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum (x^* f)(x)\alpha(D) - L_{x^*}\right| < \varepsilon .$$

Bilangan L_{x^*} di atas ditulis $L_{x^*} = (H)\int_a^b x^* f$. Jadi, fungsi f terintegral Henstock Lemah pada $[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$.

Teorema 2.1.9. [17] *Jika $f \in HL[a,b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ bilangan $L_{x^*} \in R$ tunggal.*

Bukti: Andaikan ada L_{1x^*} dan L_{2x^*} memenuhi Definisi 1.8. Karena $f \in HL[a,b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ terdapat L_{1x^*} dan L_{2x^*} sehingga untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ_1 dan δ_2 pada $[a,b]$ dan jika $\mathcal{D}_1 = \{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron $\delta_1 -$ fine pada $[a,b]$ dan $\mathcal{D}_2 = \{(C,x)\}$ sebarang partisi Perron $\delta_2 -$ fine pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|\mathcal{D}_1\sum x^* f(x)\alpha(D) - L_{1x^*}\right| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ dan } \left|\mathcal{D}_2\sum x^* f(x)\alpha(C) - L_{2x^*}\right| < \frac{\varepsilon}{4} .$$

Dibentuk: $\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Diperoleh δ fungsi positif pada $[a,b]$. Jadi untuk sebarang $\mathcal{P} = \{(P,x)\}$ partisi Perron $\delta -$ fine pada $[a,b]$ juga merupakan partisi Perron $\delta_k -$ fine $(k = 1,2)$ pada $[a,b]$.

Dengan demikian diperoleh

$$0 \le \left|L_{1x^*} - L_{2x^*}\right| \le \left|\mathcal{P}\sum x^* f(x)\alpha(P) - L_{1x^*}\right| + \left|\mathcal{P}\sum x^* f(x)\alpha(P) - L_{2x^*}\right| < \varepsilon .$$

Karena berlaku untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ maka diperoleh

$$L_{1x^*} - L_{2x^*} = 0 \iff L_{1x^*} = L_{2x^*} . \square$$

Contoh 2.1.10. Diberikan fungsi konstan $f(x) = c$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka f terintegral Henstock Lemah pada $[a,b]$.

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ maka dapat ditemukan fungsi positif δ pada $[a,b]$ sehingga jika $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron $\delta -$ fine pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) - x^*(c)\alpha([a,b])\right| = \left|\mathcal{D}\sum x^* c\alpha(D) - x^*(c)\alpha([a,b])\right|$$

$$= \left| x^*(c)\mathcal{D}\sum \alpha(D) - x^*(c)\alpha([a,b]) \right| \leq \left| x^*(c)\alpha([a,b]) - x^*(c)\alpha([a,b]) \right| = 0 < \varepsilon .$$

Jadi terbukti bahwa fungsi konstan terintegral Henstock Lemah pada $[a,b]$. □

Selanjutnya diberikan definisi dan sifat-sifat dari integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ yang mengacu pada [4] dan [14-16].

Definisi 2.1.11. [9] *Fungsi* $f:[a,b]\to X$ *dikatakan terintegral Henstock-Dunford pada* $[a,b]$ *, ditulis* $f\in HD[a,b]$, *jika untuk setiap* $x^*\in X^*$ *fungsi bernilai real* $x^*f:[a,b]\to R$ *terintegral* Henstock *pada* $[a,b]$ *dan untuk setiap interval tertutup* $A\subset[a,b]$ *terdapat vektor* $x^{**}_{(f,A)}\in X^{**}$ *sehingga*

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f .$$

Vektor $x^{**}_{(f,A)}\in X^{**}$ *disebut nilai integral Henstock-Dunford pada* A *atas fungsi* f *dan ditulis*

$$x^{**}_{(f,A)} = (HD)\int_A f .$$

Teorema 2.1.12. [14] *Jika* $f\in HD[a,b]$ *maka vektor* $x^{**}_{(f,A)}\in X^{**}$ *pada Definisi 1.1.11. adalah tunggal.*
Bukti: [14]. □

Teorema 2.1.13. [14] *Jika* $f\in HD[a,b]$ *maka* $f\in HD(A)$ *untuk setiap interval tertutup* $A\subset[a,b]$. □
Bukti: Jelas menurut Definisi 2.1.11. □

Teorema 2.1.14. [14] (Kriteria Cauchy) *Fungsi* $f\in HD[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon>0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *sehingga jika* $A\subset[a,b]$ *interval tertutup dan* $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ *dan* $\mathcal{P}=\{(P,y)\}$ *masing-masing partisi Perron* δ *-fine pada* A *berlaku*

$$\left| \mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - \mathcal{P}\sum_{y\in A} x^* f(y)\alpha(P) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap $x^*\in X^*$.
Bukti: [14]. □

B. Posisi Integral Henstock-Dunford dan Integral Henstock-Bochner pada [a,b]

Berdasarkan definisi dan sifat dari masing-masing integral Henstock-Bochner, integral Henstock Lemah, dan integral Henstock-Dunford maka dapat dipaparkan beberapa teorema sebagai berikut.

Teorema 2.2.1. [9] *Fungsi* f *terintegral Henstock-Dunford pada* $[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $x^*\in X^*$ *fungsi bernilai real* x^*f *terintegral Henstock pada* $[a,b]$.
Bukti: Jelas menurut Definisi 2.1.11. □

Setiap fungsi yang terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ maka fungsi tersebut juga terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$.

Teorema 2.2.2. *Jika fungsi* f *terintegral Henstock-Bochner pada* $[a,b]$ *maka* f *terintegral Henstock-Dunford pada* $[a,b]$.

Bukti: Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon>0$. Karena f terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ maka menurut Teorema 2.1.5 untuk sebarang interval tertutup $A\subset[a,b]$, fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada A . Jadi terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $\mathcal{D}=\{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron δ -fine pada A berlaku

ISBN. 978-602-73403-1-2

$$\left\| \mathcal{D}\sum_{x\in A} f(x)\alpha(D) - (H)\int_A f \right\|_X < \varepsilon .$$

Oleh karena itu untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

$$\left| \mathcal{D}\sum_{x\in A} x^* f(x)\alpha(D) - (H)\int_A x^* f \right| = \left\| x^* \right\|_X \left\| \mathcal{D}\sum_{x\in A} f(x)\alpha(D) - (H)\int_A f \right\|_X < \varepsilon$$

untuk setiap $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ -fine pada A .

Hal ini berarti $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk interval tertutup $A \subset [a,b]$ di atas terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f .$$

Jadi $f \in HD[a,b]$. □

Kebalikan dari Teorema 2.2.2 belum tentu berlaku, artinya tidak semua fungsi yang terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ juga terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ seperti dalam contoh.

Contoh 2.2.3. [8] Diberikan X ruang Banach dengan $X = c_0$, yaitu barisan bilangan real

$$z = \{z_1, z_2, z_3, ...\} = \{z_n\} ,$$

dengan $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ dan norma

$$\|z\| = \sup_{n\ge 1} |z_n| , \forall\, z \in c_0 .$$

Diberikan $f : [0,1] \to c_0$ oleh

$$f(x) = \left\{ \chi_{(0,1]}(x), 2\chi_{(0,\frac{1}{2}]}(x), 3\chi_{(0,\frac{1}{3}]}(x), ... \right\} \text{ untuk setiap } x \in [0,1].$$

Ditunjukkan bahwa f terintegral Henstock-Dunford pada $[0,1]$ akan tetapi f tidak terintegral Henstock-Bochner pada $[0,1]$.

Bukti: Untuk menunjukkan bahwa f terintegral Henstock-Dunford pada $[0,1]$, cukup ditunjukkan bahwa untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f : [0,1] \to R$ terintegral Henstock pada $[0,1]$.

Didefinisikan fungsi $f : [0,1] \to c_0$ dengan rumus

$$f(x) = \left\{ \chi_{(0,1]}(x), 2\chi_{(0,\frac{1}{2}]}(x), 3\chi_{(0,\frac{1}{3}]}(x), ... \right\} \text{ untuk setiap } x \in [0,1].$$

Untuk $x = 0 \in [0,1]$ maka $f(0) = \{0,0,0,0,...\} \in c_0$.

Untuk $x \in (0,1]$ maka ada $n^* \in N$ sehingga $x \in \left(\frac{1}{n^*+1}, \frac{1}{n^*} \right)$ dan $f(x) = \{1,2,3,...,n^*,0,0,...\} \in c_0$.

Diambil sebarang $x^* \in {c_0}^* = \ell_1$ maka ada barisan $y = \{y_n\} \in \ell_1$ dengan

$$\|y\| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty .$$

Oleh karena itu

$$x^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n , \text{ untuk } z = \{z_n\} \in c_0 .$$

Dengan demikian diperoleh

$$x^* f(x) = x^* \left\{ \chi_{(0,1]}(x), 2\chi_{(0,\frac{1}{2}]}(x), 3\chi_{(0,\frac{1}{3}]}(x), ... \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} y_k k \chi_{(0,\frac{1}{k}]}(x)$$

sehingga

$$\int_0^1 |x^* f(x)| dx = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} y_k k \chi_{(0,\frac{1}{k}]}(x) \right| dx \le \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| k \int_0^1 \chi_{(0,\frac{1}{k}]}(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| k \left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty .$$

Jadi $x^* f$ terintegral Lebesgue pada $[0,1]$. Akibatnya $x^* f$ terintegral Henstock pada $[0,1]$. Hal ini berarti f terintegral Henstock-Dunford pada $[0,1]$. Jadi, f terintegral Henstock-Dunford pada $[0,1]$.

Lebih lanjut

$$\int_0^1 x^* f(x) dx = \int_0^1 y_k k \chi_{(0,\frac{1}{k}]}(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} y_k .$$

Akan tetapi

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left\{ \chi_{(0,1]}(x), 2\chi_{(0,\frac{1}{2})}(x), \ldots \right\} dx = \left\{ \int_0^1 \chi_{(0,1]}(x) dx, \int_0^1 2\chi_{(0,\frac{1}{2}]}(x) dx, \ldots \right\} = \{1,1,1,1,\ldots\} \notin c_0$$

Jadi fungsi $f:[0,1] \to c_0$ tidak terintegral Henstock-Bochner pada $[0,1]$. □

Teorema 2.2.4. *Jika fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ maka f terintegral Henstock Lemah pada $[a,b]$.*

Bukti: Menurut Teorema 2.1.6, karena $f \in HB[a,b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$. Hal ini berarti fungsi f terintegral Henstock lemah pada $[a,b]$. □

Setiap fungsi yang terintegral Henstock Lemah maka fungsi tersebut juga terintegral Henstock-Dunford, sebaliknya juga berlaku seperti dalam teorema di bawah ini.

Teorema 2.2.5. *Jika fungsi f terintegral Henstock Lemah pada $[a,b]$ maka f terintegral Henstock Dunford pada $[a,b]$.*

Bukti: Fungsi f terintegral Henstock Lemah pada $[a,b]$ berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$, yaitu untuk setiap $x^* \in X^*$ ada bilangan $L_{X^*} \in R$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron $\delta -$ fine pada $[a,b]$ berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum (x^* f)(x) \alpha(D) - L_{X^*} \right| < \varepsilon .$$

Hal ini berarti bahwa setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (H)\int_A x^* f .$$

Jadi $f \in HD[a,b]$. □

Teorema 2.2.6. *Jika fungsi f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ maka f terintegral Henstock Lemah pada $[a,b]$.*

Bukti: Karena fungsi f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ maka untuk setiap $x^* \in X$ fungsi bernilai real $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$. Jadi, untuk setiap $x^* \in X$ fungsi bernilai real $x^* f$ terintegral Henstock pada $[a,b]$. Hal ini berarti fungsi f terintegral Henstock Lemah pada $[a,b]$. □

Akibat 2.2.7. *Fungsi f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ jika dan hanya jika f terintegral Henstock Lemah pada $[a,b]$.* □

III. SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil pembahasan yang diuraikan dalam bentuk beberapa teorema maka dapat diambil kesimpulan bahwa setiap fungsi yang terintegral Henstock-Bochner maka fungsi tersebut terintegral

Henstock-Dunford, akan tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Lebih lanjut dengan memperlemah syarat dari integral Henstock-Bochner menjadi integral Henstock Lemah diperoleh bahwa integral Henstock Lemah ekuivalen dengan integral Henstock-Dunford.

Topik tentang integral Henstock-Dunford menjadi kajian bagi penulis. Bahasan selanjutnya yang dipandang perlu dikaji oleh penulis adalah integral Henstock-Bochner Serentak (*Henstock-Bochner Equi-integrable*) dan kaitannya dengan integral Henstock-Dunford. Selain itu perlu dikaji karakteristik dari ruang fungsi yang terintegral henstock-Dunford pada $[a,b]$

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro yang telah memberikan dana untuk penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] R. A. Gordon, The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock, USA: Mathematical Society, 1994.

[2] P. Y. Lee, Lanzhou Lectures on Henstock Integration, Singapore.: World Scientific, 1989.

[3] Pfeffer, W.F., The Riemann Approach to Integration, New York: Cambridge University Press, 1993.

[4] Ch. R. Indrati, Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclide Berdimensi-n, Disertasi, Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada, 2002.

[5] Boccuto A., Skvortsov A.V.,"Henstock-Kurzweil Type Integration of Riesz-Space-Valued Functions and Applications to Walsh Series," Real Analysis Echange, vol. 29(1), pp. 419-439, 2004.

[6] Heikkila S.,"Monotone Convergence Theorems for Henstock-Kurzweil Integrable Functions and Applications," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 377(1), pp. 286-295, 2011.

[7] Ch. R. Indrati dan B. Surodjo, Aplikasi Integral Henstock-Kurzweil pada Medan Vektor, Yogyakarta: Lembaga Penelitian UGM, 2000.

[8] S. Schwabik and Ye. Guoju, Topics in Banach Space Integration, Manuscrip in Preparation, 2004.

[9] Ye. Guoju and Tianqing An., "On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals," IJMMS, vol. 25(7), pp. 467-478, 2001.

[10] Saifullah, Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide R^n, Tesis, Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada, 2003.

[11] Solikhin, "Perluasaan Harnack dan Sifat Cauchy Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide R^n," Jurnal Matematika, vol. 16(1), hal. 8-12, April 2013.

[12] Solikhin, Sumanto, dan Khabibah, "Locally dan Globally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b]," Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, 9 November 2013, A.8 hal. 55-64, ISBN 978–979-16353-9-4, November 2013.

[13] Solikhin, Sumanto, dan Khabibah, "Functionally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b]," Jurnal Sains dan Matematika, vol. 20(3), hal. 58-63, Juli 2012.

[14] Solikhin, Sumanto, dan Khabibah, "Essesntially Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b]," Jurnal Matematika, vol. 17(1), hal. 55-61, Agustus 2014.

[15] Solikhin, Sumanto, dan A. Aziz, "Fungsi Primitif Integral Henstock-Dunford pada [a,b]," Semarang: Jurusan Matematika FSM Undip, 2014.

[16] Solikhin, H. Tjahjana, dan Z. Solichin, (2015), "Kekonvergenan Barisan Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada [a,b]," Jurnal Matematika, vol. 19(1), hal. 29-39, April 2016.

[17] Solikhin, Integral Dunford-Henstock pada sel $[\overline{a},\overline{b}]$, Tesis, Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada, 2011.

Posisi Integral Henstock-Dunford dan Integral Henstock-Bochner pada [a,b]

ORIGINALITY REPORT

17%	13%	10%	2%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	www.coursehero.com Internet Source	2%
2	Mozart W. Talakua, Marlon S. N. Van Delsen. "INTEGRAL DELTA DAN SIFAT-SIFATNYA", BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 2013 Publication	2%
3	docplayer.info Internet Source	1%
4	vdoc.pub Internet Source	1%
5	vdokumen.com Internet Source	1%
6	garuda.kemdikbud.go.id Internet Source	1%
7	Ilmiah Nu Izzah. "PENGEMBANGAN MEDIA TOUCH AND PLAY 3D IMAGES MATERI PANCA INDERA KELAS IV SEKOLAH DASAR BERBASIS	1%

	ADOBE FLASH", Florea : Jurnal Biologi dan Pembelajarannya, 2017 Publication		
8	indrawanpradinata.wordpress.com Internet Source	1	%
9	"Numerical Methods", Dynamic General Equilibrium Modelling, 2005 Publication	1	%
10	dokumen.pub Internet Source	1	%
11	jaydaigle.net Internet Source	1	%
12	bigfoot.quake1.net Internet Source	1	%
13	www.niu.edu Internet Source	<1	%
14	yunikemath28.wordpress.com Internet Source	<1	%
15	Submitted to City University of Hong Kong Student Paper	<1	%
16	A Aziz, Solikhin, Y D Sumanto, R S U Heri. "Primitive function of the Dunford integral", Journal of Physics: Conference Series, 2021 Publication	<1	%
17	mst.mimuw.edu.pl Internet Source		

<1 %

18	www.scribd.com Internet Source	<1 %
19	123dok.com Internet Source	<1 %
20	Ye Guoju, An Tianqing. "On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis integrals", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2001 Publication	<1 %
21	id.scribd.com Internet Source	<1 %
22	www.fcfm.buap.mx Internet Source	<1 %
23	Dineen, S.. "Extending bounded type holomorphic mappings on a Banach space", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 20040915 Publication	<1 %
24	www.slideshare.net Internet Source	<1 %
25	zaki.math.web.id Internet Source	<1 %
26	repository.usd.ac.id Internet Source	

		<1%
27	eprints.uad.ac.id Internet Source	<1%

Exclude quotes	On	Exclude matches	Off
Exclude bibliography	On		

Posisi Integral Henstock-Dunford dan Integral Henstock-Bochner pada [a,b]

GRADEMARK REPORT

FINAL GRADE

/1000

GENERAL COMMENTS

Instructor

PAGE 1

PAGE 2

PAGE 3

PAGE 4

PAGE 5

PAGE 6

PAGE 7

PAGE 8