

LEMBAR
HASIL PENILAIAN SEJAWAT SEBIDANG ATAU *PEER REVIEW*
KARYA ILMIAH : BUKU

Judul Karya Ilmiah (Buku) : Integral Dunford Fungsi Bernilai Banach

Nama/Jumlah Penulis : Solikhin, **Abdul Aziz**/ 2

Status Pengusul : Penulis ke-2

Identitas Jurnal Ilmiah : a. Nomor ISBN : 978-623-5509-40-2

b. Edisi : Pertama

c. Tahun terbit : 2022

d. Penerbit : Fastindo

e. Jumlah halaman : 216

f. Alamat web buku : https://drive.google.com/drive/folders/19DnHyknLZSqN7KB-aPbxAxcm9BmfAE_w?usp=share_link

Kategori Publikasi Buku : ☒ Referensi

(beri ✓ pada kategori yang tepat) ☐ Monograf

☐ Book Chapter

Hasil Penilaian *Peer Review* :

Komponen Yang Dinilai	Nilai Reviewer		Nilai Rata-Rata
	Reviewer 1	Reviewer 2	
a. Kelengkapan unsur isi buku (10%)	3,8	3	3,4
b. Ruang lingkup dan kedalaman pembahasan (30%)	11,75	11	11,375
c. Kecukupan dan kemutakhiran data/informasi dan metodologi (30%)	11,50	11	11,25
d. Kelengkapan unsur dan kualitas terbitan/buku (30%)	11,25	11	11,125
Total = (100%)	38,30	36	37,15
Nilai Pengusul = 40% x 37,15 = 14,86			

Semarang,
Reviewer 1

Nama : Farikhin, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197312202000121001
Unit Kerja : FSM Undip
Bidang Ilmu : Matematika

Reviewer 2

Nama : R. Heru Tjahjana, S.Si., M.Si.
NIP. 197407172000121001
Unit Kerja : FSM Undip
Bidang Ilmu : Matematika

LEMBAR
HASIL PENILAIAN SEJAWAT SEBIDANG ATAU *PEER REVIEW*
KARYA ILMIAH : BUKU

Judul Karya Ilmiah (Buku) : Integral Dunford Fungsi Bernilai Banach

Nama/Jumlah Penulis : Solikhin, **Abdul Aziz**/ 2

Status Pengusul : Penulis ke-2

Identitas Jurnal Ilmiah : a. Nomor ISBN : 978-623-5509-40-2

b. Edisi : Pertama

c. Tahun terbit : 2022

d. Penerbit : Fastindo

e. Jumlah halaman : 216

f. Alamat web buku : https://drive.google.com/drive/folders/19DnHyknLZSqN7KB-aPbxAxcm9BmfAE_w?usp=share_link

Kategori Publikasi Buku : ☒ Referensi

(beri ✓ pada kategori yang tepat) ☐ Monograf

☐ Book Chapter

Hasil Penilaian *Peer Review* :

Komponen Yang Dinilai	Nilai Maksimal Jurnal Ilmiah			Nilai Akhir Yang Diperoleh
	Referensi	Monograf	Book Chapter	
	40			
a. Kelengkapan unsur isi buku (10%)	4			3,8
b. Ruang lingkup dan kedalaman pembahasan (30%)	12			11,75
c. Kecukupan dan kemutakhiran data/informasi dan metodologi (30%)	12			11,50
d. Kelengkapan unsur dan kualitas terbitan/buku (30%)	12			11,25
Total = (100%)	40			38,30
Nilai Pengusul = 40% x 38,30 = 15,32				

Catatan Penilaian artikel oleh Reviewer :

1. **Kesesuaian dan kelengkapan unsur isi buku:**

Unsur isi buku lengkap dan baik. Kesesuaian buku sebagai buku referensi dan kesesuaian judul dengan isinya baik.

2. **Ruang lingkup dan kedalaman pembahasan:**

Ruang lingkup kedalaman sudah sesuai dengan buku referensi yaitu membahas beberapa topik teori integral dan pembahasannya disertai dengan beberapa teorema dan bukti.

3. **Kecukupan dan kemutakhiran data/informasi dan metodologi:**

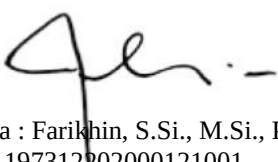
Materi yang dibahas merupakan topik penelitian yang memiliki nilai kemutakhiran dalam ilmu matematika khususnya bidang matematika analisis.

4. **Kelengkapan unsur dan kualitas terbitan buku:**

Kelengkapan untuk diterbitkan sebagai buku khususnya dalam jumlah halaman yaitu 216 sudah cukup baik.

Semarang, 17 April 2023

Reviewer 1



Nama : Farikhin, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197312202000121001
Unit Kerja : FSM Undip
Bidang Ilmu : Matematika

LEMBAR
HASIL PENILAIAN SEJAWAT SEBIDANG ATAU *PEER REVIEW*
KARYA ILMIAH : BUKU

Judul Karya Ilmiah (Buku) : Integral Dunford Fungsi Bernilai Banach

Nama/Jumlah Penulis : Solikhin, **Abdul Aziz**/ 2

Status Pengusul : Penulis ke-2

Identitas Jurnal Ilmiah : a. Nomor ISBN : 978-623-5509-40-2

b. Edisi : Pertama

c. Tahun terbit : 2022

d. Penerbit : Fastindo

e. Jumlah halaman : 216

f. Alamat web buku : https://drive.google.com/drive/folders/19DnHyknLZSqN7KB-aPbxAxcm9BmfAE?usp=share_link

Kategori Publikasi Buku : ☒ Referensi

(beri ✓ pada kategori yang tepat) ☐ Monograf

☐ Book Chapter

Hasil Penilaian *Peer Review* :

Komponen Yang Dinilai	Nilai Maksimal Jurnal Ilmiah			Nilai Akhir Yang Diperoleh
	Referensi 40	Monograf 	Book Chapter 	
e. Kelengkapan unsur isi buku (10%)	4			3
f. Ruang lingkup dan kedalaman pembahasan (30%)	12			11
g. Kecukupan dan kemutakhiran data/informasi dan metodologi (30%)	12			11
h. Kelengkapan unsur dan kualitas terbitan/buku (30%)	12			11
Total = (100%)	40			36
Nilai Pengusul = 40% x 36 = 14,4				

Catatan Penilaian artikel oleh Reviewer :

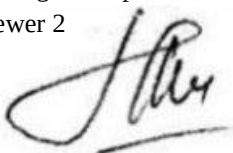
1. **Kesesuaian dan kelengkapan unsur isi buku:**
Isi dan kelengkapan buku relatif memenuhi kelengkapan artikel untuk kenaikan ke jabatan fungsional lector.

2. **Ruang lingkup dan kedalaman pembahasan:**
Ruang lingkup dan kedalaman pembahasan buku memenuhi syarat.

3. **Kecukupan dan kemutakhiran data/informasi dan metodologi:**
Kecukupan dan kemutakhiran data informasi, metodologi diberikan secara detail.

4. **Kelengkapan unsur dan kualitas terbitan buku:**
Unsur dan kualitas terbitan sesuai.

Semarang, 18 April 2023
Reviewer 2



Nama : Dr. R. Heru Tjahjana, S.Si., M.Si.
NIP. 197407172000121001
Unit Kerja : FSM Undip
Bidang Ilmu : Matematika

INTEGRAL DUNFORD FUNGSI BERNILAI BANACH

Solikhin
Abdul Aziz



INTEGRAL DUNFORD FUNGSI BERNILAI BANACH

Hak Cipta © Solikhin, Abdul Aziz

All right reserved

Penulis : Solikhin, Abdul Aziz

Editor : YD Sumanto

Tata Letak : Thomas Sugeng Hariyoto

Desain Sampul : Okky Widya Arditya

Cetakan I, 2022



Penerbit Fastindo

Jl. Prof. Sudarto LPPU II 12 A,

Tembalang, Semarang

Telp. (024) 764 805 90

Email: fstindo@gmail.com

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apa pun, baik secara elektronik maupun mekanik, termasuk memfotokopi, merekam, atau dengan menggunakan system penyimpanan lainnya, tanpa izin tertulis dari Penerbit.

ISBN 978-623-5509-40-2

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah Subhanahuwata'ala, Tuhan Yang Maha Kuasa, atas hidayah, bimbingan, kasih sayang, dan rahmat-Nya sehingga kami dapat menyelesaikan dan mempublikasikan buku referensi yang berjudul **Integral Dunford Fungsi Bernilai Banach** pada tahun 2022. Buku referensi ini kami susun sebagai bagian dari upaya membuka wawasan tentang teori integral khususnya integral Dunford yang dikembangkan pada fungsi bernilai Banach. Buku ini menjadi dasar referensi untuk pengembangan atau perluasan dari integral Dunford atau lainnya.

Buku ini membahas mulai dari himpunan semua bilangan real, himpunan terukur, barisan fungsi, hingga ruang bernorma, ruang Banach, dan ruang dual. Selain itu, dibahas partisi dan jumlahan Riemann-Stieltjes. Kemudian dibahas fungsi terukur, integral Lebesgue, integral McShane, dan integral Henstock beserta hubungannya. Selanjutnya pembahasan utama dalam buku ini ditekankan pada integral Dunford mulai dari sifat-sifat sederhana, fungsi primitive, teorema kekonvergenan, dan perluasan Harnack beserta sifat Cauchy. Dibagian terakhir dari buku ini dibahas operator yang bekerja pada ruang fungsi terintegral Dunford.

Tim Penyusun mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas segenap pihak sehingga akhirnya Buku ini dapat diterbitkan. Penyusun menyadari bahwa Buku ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu kami berharap masukan dari berbagai pihak sehingga buku ini tersaji dengan informasi ilmiah yang lebih baik. Semoga buku ini bermanfaat bagi insan akademis yang membutuhkan.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL.....	i
KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR SIMBOL.....	ix
 BAB 1 Himpunan.....	 1
1.1 Himpunan	1
1.2 Himpunan Terukur	3
 BAB 2 Barisan Fungsi.....	 17
 BAB 3 Ruang Banach	 27
3.1 Ruang Bernorma	27
3.2 Fungsi Kontinu pada Ruang Bernorma	46
3.3 Ruang Dual.....	58
 BAB 4 Partisi dan Jumlahan Riemann-Stieljes	 61
4.1 Partisi Perron δ -fine.....	61
4.2 Jumlahan Riemann-Stieljes	65
 BAB 5 Integral Lebesgue, McShane, dan Henstock	 67
5.1 Fungsi Terukur	67
5.2 Integral Lebesgue	77
5.3 Integral McShane.....	80
5.4 Integral Henstock.....	92
5.5 Hubungan Integral McShane dan Henstock	102

BAB 6	Integral Dunford.....	109
6.1	Fungsi Terukur Lemah	109
6.2	Integral Dunford	114
6.3	Fungsi Primitif Integral Dunford.....	120
BAB 7	Kekonvergenan dan Perluasan Harnack Integral Dunford..	147
7.1	Kekonvergenan Integral Dunford.....	147
7.2	Perluasan Harnack Integral Dunford	164
BAB 8	Operator Integral Dunford.....	171
8.1	Operator Linear Terbatas	171
8.2	Operator pada Integral Dunford	187
Daftar Pustaka		207
Biografi Penulis		
Indeks		

DAFTAR SIMBOL

R	: Himpunan semua bilangan riil
N	: Himpunan semua bilangan Asli
$\emptyset$	: Himpunan kosong (<i>void set</i>)
$\ \cdot\ _X$	: Norma atas X
ρ	: Metrik
$[a, b]$	: Interval Tertutup atau Sel di dalam R
$h.d$	: Hampir dimana-mana
$\mu(A)$	: Ukuran pada himpunan A
$\alpha(A)$	: Panjang interval tertutup A
$\eta(A)$	: Panjang interval A
X	: Ruang Banach
X^*	: Ruang dual terhadap X , yaitu $\{x^* x^*: X \rightarrow R\}$
X^{**}	: Ruang dual kedua terhadap X , $\{x^{**} x^{**}: X^* \rightarrow R\}$
χ_A	: Fungsi Karakteristik pada himpunan A
f	: Fungsi dari $[a, b]$ ke ruang Banach X
$\{f_n\}$	: Barisan fungsi
$\mathcal{D} = \{(D, x)\}$	: Partisi
x^*	: Fungsi dari ruang Banach X ke R
$x^* f$	: Fungsi komposisi dari x^* dan f
$\mathcal{L}_c(X, Y)$	: Koleksi semua fungsional linear kontinu pada X

$D_L[a,b]$	: Himpunan semua fungsi terintegral Dunford pada $[a,b]$
$L[a,b]$	: Himpunan semua fungsi terintegral Lebesgue pada $[a,b]$
$M[a,b]$	: Himpunan semua fungsi terintegral McShane pada $[a,b]$
$H[a,b]$	: Himpunan semua fungsi terintegral Henstock pada $[a,b]$
$C[a,b]$	: Himpunan semua fungsi kontinu pada $[a,b]$
$B[a,b]$	: Himpunan semua fungsi terbatas pada $[a,b]$
$AC(A)$	: Himpunan semua fungsi kontinu mutlak pada A
$ACG(A)$	: Himpunan semua fungsi kontinu mutlak terintlak pada A
$AC^*(A)$	: Himpunan semua fungsi kontinu mutlak kuat pada A
$ACG^*(A)$	: Himpunan semua fungsi kontinu mutlak kuat terintlak pada A
$BV(A)$	: Himpunan semua fungsi bervariasi terbatas pada A
$BVG(A)$	: Himpunan semua fungsi bervariasi terbatas terintlak pada A
$BV^*(A)$	: Himpunan semua fungsi bervariasi terbatas kuat pada A

$BVG^*(A)$	: Himpunan semua fungsi bervariasi terbatas kuat terintlak pada A
$\mathcal{J}$	: Koleksi semua fungsi sederhana
L_1	: Ruang barisan dengan $\ x\ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$
L_{∞}	: Ruang barisan dengan $\ x\ = \sup_{n \geq 1} x_n < \infty$
$(D) \int_A f$	: Nilai integral Dunford fungsi f pada A
$(L) \int_A x^* f$	: Nilai integral Lebesgue pada A
$(M) \int_A f$	: Nilai integral McShane fungsi f pada A
$(H) \int_A f$	: Nilai integral Henstock fungsi f pada A
$(R) \int_A f$	: Nilai integral Riemann fungsi f pada A
$B(X)$	: Unit ball dalam ruang Banach X , $\{x \in X \mid \ x\ _X \leq 1\}$
$B(X^*)$	: Unit ball dalam ruang dual X^* , $\{x^* \in X^* \mid \ x^*\ _{X^*} \leq 1\}$
$B(X^*, L_1)$	: Koleksi operator linear terbatas dari X^* ke L_1
$\square$	: Akhir bukti.

BAB 1

Himpunan

1.2 Himpunan

Himpunan semua bilangan real dinotasikan dengan R . Jarak antara $x \in R$ dan $y \in R$ dinotasikan $d(x, y)$ dan didefinisikan oleh

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Diberikan $A \neq \emptyset$, $A \subset R$, yaitu untuk setiap $x \in A$ berakibat $x \in R$. Jarak titik $x \in R$ terhadap himpunan A didefinisikan sebagai bilangan

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) : y \in A\}.$$

Diberikan $A \neq \emptyset$, $A \subset R$ dan A terbatas, yaitu ada bilangan real $M > 0$ sehingga $|x| \leq M$ untuk setiap $x \in A$. Diameter himpunan A dinotasikan $\text{diam}(A)$ dan didefinisikan sebagai bilangan

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Untuk titik $x \in R$, persekitaran (*neighborhood*) titik x dengan jari-jari $r > 0$ dinotasikan $B(x, r)$ dan didefinisikan oleh

$$B(x, r) = \{y \in R : d(x, y) < r\},$$

dan disebut juga bola terbuka (*open ball*).

Sedangkan $B(x, r) = \{y \in R : d(x, y) \leq r\}$ disebut bola tertutup (*closed ball*).

Diberikan himpunan $A \subset R$. Himpunan semua titik dalam (*interior point*) A , himpunan semua titik limit (*limit point*) A , himpunan semua titik batas (*boundary point*) A , dan penutup (*closure*) A berturut-turut dinotasikan

Himpunan

A^0 (atau $\text{int}(A)$), A' , $\partial(A)$, dan $\bar{A}$, dan berturut-turut didefinisikan sebagai

$$A^0 = \{x \in R : \exists r > 0, B(x, r) \subset A\},$$

$$A' = \{x \in R : \forall r > 0, B(x, r) \cap A - \{x\} \neq \emptyset\},$$

$$\partial(A) = \{x \in R : \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ dan } B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset\},$$

dan

$$\bar{A} = \{x \in R : \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\} = A \cup A'.$$

Jika $a, b \in R$ maka interval tertutup di dalam R ditulis dengan

$$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}.$$

Interval $[a, b]$ dikatakan *non-degenerate* jika $a < b$ dan jika tidak demikian dikatakan *degenerate*. Interval $[a, b]$ disebut sel jika $[a, b]$ merupakan interval yang *non-degenerate*.

Diberikan $a, b \in R$ dan $a \leq b$. Interval terbatas di dalam R didefinisikan oleh

(i) $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$

(ii) $[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$

(iii) $(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$

(iv) $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$

Sedangkan interval tak terbatas di dalam R didefinisikan oleh

(i) $(-\infty, a] = \{x \in R : x \leq a\}$

$$(ii) \quad (-\infty, a) = \{x \in R : x < a\}$$

$$(iii) \quad [b, \infty) = \{x \in R : x \geq b\}$$

$$(iv) \quad (b, \infty) = \{x \in R : x > b\}$$

Jika $a = b$ maka $(a, a) = \emptyset$ dan $[a, a] = \{a\}$. Jadi himpunan kosong dan himpunan singleton $\{a\}$ merupakan interval.

Dua interval atau dua sel dikatakan tidak saling tumpang-tindih (*non overlapping*) jika irisan antara dua interior interval atau sel tersebut kosong, tetapi jika tidak demikian dikatakan saling tumpang-tindih (*overlapping*).

1.2 Himpunan Terukur

Panjang interval sering digunakan dalam diferensiasi dan integrasi. Sebagai contoh untuk sebarang interval $A \subset R$ (terbuka, tertutup, setengah terbuka) dengan titik ujung a dan b ($a < b$), maka Panjang interval A diberikan oleh $\eta(A) = b - a$. Jika $A \subset R$ merupakan interval tidak terbatas, maka panjang interval A diberikan oleh $\eta(A) = \infty$. Ada situasi dimana akan berguna ketika mengukur ukuran himpunan selain himpunan interval. Perluasan ke dalam gabungan interval sangat jelas, akan tetapi jauh lebih jelas untuk sebarang himpunan. Misalnya, berapa ukuran himpunan semua bilangan irrasional dalam $[0, 1]$? Apakah mungkin untuk memperluas konsep Panjang (atau ukuran) interval ke dalam sebarang himpunan? Ukuran Lebesgue adalah salah satu dari beberapa pendekatan untuk pemecahan solusi tersebut.

Pada subbab ini dijabarkan mengenai ukuran Lebesgue yaitu ukuran atau panjang interval, ukuran luar Lebesgue, dan himpunan terukur Lebesgue beserta sifat-sifat dasarnya.

Definisi 1.2.1 Diberikan interval terbuka $I = (a, b)$, I di R , panjang (length) interval terbuka $I = (a, b)$ didefinisikan sebagai berikut :
 $\eta(I) = b - a$.

Selanjutnya panjang (length) untuk sembarang interval, sedemikian hingga untuk setiap interval (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ dan $[a, b]$ di R berlaku
 $\eta((a, b)) = \eta((a, b]) = \eta([a, b)) = \eta([a, b]) = b - a$.

Definisi 1.2.2 Diberikan himpunan $A \subseteq R$. Ukuran luar Lebesgue himpunan A didefinisikan:

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \eta(I_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

dengan I_n koleksi interval buka $\{I_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$.

Definisi 1.2.3 Himpunan A dikatakan content zero, $\mu(A) = 0$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat sebanyak hingga koleksi interval buka $\{I_k \mid k = 1, 2, 3, \dots, n\}$ sedemikian hingga $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k$ dan $\sum_{k=1}^n \eta(I_k) < \varepsilon$.

Setiap himpunan berhingga A adalah content zero. Tetapi ada himpunan tak berhingga yang content zero.

Contoh 1.2.4 Himpunan $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ adalah *content zero*.

Bukti: Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, pilih n_0 sedemikian sehingga $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{5}$.

Diberikan interval buka $I_0 = \left(-\frac{\varepsilon}{5}, \frac{\varepsilon}{5}\right)$ dan $I_k = \left(\frac{1}{k} - \frac{\varepsilon}{4n_0}, \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{4n_0}\right)$ untuk

$k = 1, 2, \dots, n_0 - 1$.

Maka

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{n_0-1} I_k$$

$$\begin{aligned} \text{dan } \sum_{k=0}^{n_0-1} \eta(I_k) &= \frac{2\varepsilon}{5} + \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{\varepsilon}{2n_0} \\ &= \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon(n_0-1)}{2n_0} < \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi terbukti himpunan A *content zero*. $\square$

Teorema 1.2.5 Setiap himpunan A yang *content zero* maka A terbatas.

Definisi 1.2.6 Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$. Himpunan A dikatakan berukuran nol (*measure zero*), $\mu(A) = 0$, jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat koleksi interval buka $\{I_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$

sedemikian hingga $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \eta(I_n) < \varepsilon$.

Contoh 1.2.7 Himpunan berelemen tunggal (*singleton set*) mempunyai ukuran luar nol (*measure zero*).

Bukti: Misalkan $A = \{a\}$, maka $A \subseteq \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ untuk setiap bilangan asli n .

$$\begin{aligned} \text{Diperoleh } \mu(A) &= \inf \left\{ \eta \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right) \mid A \subseteq \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{2}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Teorema 1.2.8 Setiap himpunan A yang content zero adalah measure zero.

Contoh 1.2.9 Himpunan bilangan rasional Q adalah *measure zero*

$$Q = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$$

Bukti: Diberikan sembarang $\varepsilon > 0$.

Dibentuk himpunan interval buka $I_k = \left\{ r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \right\}$ untuk.

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Maka

$$Q \subset \bigcup_k I_k$$

sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Jadi terbukti himpunan Q adalah *measure zero*

Teorema 1.2.10 (Subcountably Additive) Untuk setiap himpunan $\{A_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ berlaku

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Bukti: Jika ada A_n , dengan $\mu(A_n) = \infty$, maka teorema telah terbukti yaitu

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty.$$

Anggap $\mu(A_n) < \infty$ untuk setiap n .

Karena $\mu(A_n) = \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \eta(I_{nm}) \mid A_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{nm} \right\}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$

terdapat koleksi $\{I_{nm} \mid m = 1, 2, 3, \dots\}$ sehingga $A_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{nm}$ dan

$$\sum_{m=1}^{\infty} \eta(I_{nm}) < \mu(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}, \text{ untuk setiap } n.$$

Diperoleh $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{nm}$ dan

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \eta(I_{nm}) < \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

yang berakibat $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \varepsilon$

Karena ε sebarang bilangan positif, maka $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. $\square$

Teorema 1.2.11 Untuk setiap $A \subseteq B$ berlaku $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Bukti: Jika $\{I_p \mid p = 1, 2, 3, \dots\}$ koleksi interval buka sedemikian hingga

$$B \subseteq \bigcup_{p=1}^{\infty} I_p \text{ yang berakibat } \mu(A) \leq \sum_{p=1}^{\infty} \eta(I_p).$$

Jadi $\mu(A)$ adalah batas bawah himpunan $\left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \eta(I_p) \mid B \subseteq \bigcup_{p=1}^{\infty} I_p \right\}$.

Jadi, $\mu(B) = \inf \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \eta(I_p) \mid B \subseteq \bigcup_{p=1}^{\infty} I_p \right\}$, maka $\mu(A) \leq \mu(B)$. $\square$

Berdasarkan ukuran luar didefinisikan pengertian himpunan terukur Lebesgue. Untuk selanjutnya, himpunan terukur Lebesgue cukup ditulis himpunan terukur.

Definisi 1.2.12 Himpunan E dikatakan terukur (measurable) jika untuk setiap A berlaku:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C)$$

dengan E^C menyatakan komplemen E .

Karena $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^C)$ dan menurut Teorema 1.2.11 maka,

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C)$$

Selanjutnya untuk membuktikan suatu himpunan terukur cukup diperlihatkan pertidaksamaan berikut:

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C)$$

Teorema 1.2.13 *Himpunan $\emptyset$ dan R adalah himpunan terukur dan jika E himpunan terukur maka E^C juga terukur.*

Bukti: Himpunan $\emptyset$ terukur karena untuk setiap A berlaku:

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \cap \emptyset) + \mu(A \cap \emptyset^C) \\ &= \mu(\emptyset) + \mu(A \cap R) \\ &= 0 + \mu(A) \\ &= \mu(A)\end{aligned}$$

Selanjutnya himpunan R juga terukur

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \cap R) + \mu(A \cap R^C) \\ &= \mu(A) + \mu(A \cap \emptyset) \\ &= \mu(A) + \mu(\emptyset) \\ &= \mu(A) + 0 \\ &= \mu(A)\end{aligned}$$

Diketahui himpunan E terukur, berarti untuk setiap A berlaku

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C) \\ &= \mu(A \cap (E^C)^C) + \mu(A \cap E^C)\end{aligned}$$

Jadi, E^C juga terukur. $\square$

Teorema 1.2.14 *Setiap himpunan berukuran luar nol merupakan himpunan terukur.*

Bukti: Ambil E himpunan berukuran luar nol dan $A \subseteq R$.

Karena $A \cap E \subseteq E$ maka $0 \leq \mu(A \cap E) \leq \mu(E) = 0$

Dengan demikian diperoleh

$$\mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C) = \mu(A \cap E^C) \leq \mu(A).$$

Jadi terbukti bahwa E terukur. $\square$

Teorema 1.2.15 *Gabungan atau irisan dua himpunan terukur merupakan himpunan terukur.*

Bukti: Misalkan dua himpunan terukur tersebut E dan F .

Himpunan F terukur jika dan hanya jika untuk setiap A berlaku:

$$\mu(A) = \mu(A \cap F) + \mu(A \cap F^C).$$

Khususnya jika $A = A \cap E^C$, maka

$$\mu(A \cap E^C) = \mu(A \cap E^C \cap F) + \mu(A \cap E^C \cap F^C) \quad (1.1)$$

Oleh karena $A \cap (E \cup F) = (A \cap E) \cup (A \cap E^C \cap F)$, maka

$$\mu(A \cap (E \cup F)) \leq \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C \cap F) \quad (1.2)$$

Dari (1.1) dan (1.2) diperoleh:

$$\begin{aligned} & \mu(A \cap (E \cup F)) + \mu(A \cap (E \cup F)^C) \\ & \leq [\mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C \cap F)] + \mu(A \cap (E \cup F)^C) \\ & = \mu(A \cap E) + [\mu(A \cap E^C \cap F) + \mu(A \cap E^C \cap F^C)] \\ & = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C) \quad \text{karena } E \text{ terukur} \\ & = \mu(A) \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $E \cup F$ terukur.

Karena $E \cap F = (E^C \cup F^C)^C$ di mana $(E^C \cup F^C)^C$ terukur, maka terbukti bahwa $E \cap F$ terukur. $\square$

Teorema 1.2.16 Jika $\{E_p \mid p=1,2,3,\dots,n\}$ koleksi hingga himpunan terukur dan saling asing, maka untuk setiap A berlaku

$$\mu\left(A \cap \left(\bigcup_{p=1}^n E_p\right)\right) = \sum_{p=1}^n \mu(A \cap E_p).$$

Bukti: Dibuktikan dengan induksi matematika.

Teorema benar untuk $n = 1$, selanjutnya dianggap benar untuk $n = m - 1$.

Jadi berlaku
$$\mu\left(A \cap \left(\bigcup_{p=1}^{m-1} E_p\right)\right) = \sum_{p=1}^{m-1} \mu(A \cap E_p).$$

Koleksi $\{E_p \mid p=1,2,3,\dots,n\}$ saling asing maka

$$A \cap \left(\bigcup_{p=1}^m E_p\right) \cap E_m = A \cap E_m \text{ dan}$$

$$A \cap \left(\bigcup_{p=1}^m E_p\right) \cap E_m^c = A \cap \left(\bigcup_{p=1}^{m-1} E_p\right)$$

Karena E_m terukur maka

$$\begin{aligned} \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{p=1}^m E_p\right)\right) &= \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{p=1}^m E_p\right) \cap E_m\right) + \\ &\mu\left(A \cap \left(\bigcup_{p=1}^m E_p\right) \cap E_m^c\right) \\ &= \mu(A \cap E_m) + \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{p=1}^{m-1} E_p\right)\right) \\ &= \mu(A \cap E_m) + \sum_{p=1}^{m-1} \mu(A \cap E_p) \end{aligned}$$

$$= \sum_{p=1}^m \mu(A \cap E_p)$$

Jadi, teorema benar untuk $n = m - 1$. $\square$

Teorema 1.2.17 *Gabungan countable himpunan terukur merupakan himpunan terukur.*

Bukti: Misalkan $\{E_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ koleksi *countable* himpunan terukur

yang saling asing. Tulis $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ dan $F_n = \bigcup_{p=1}^n E_p$ maka $E^C \subseteq F_n^C$ untuk

setiap bilangan asli n .

Dengan Teorema 1.2.16 diperoleh $\mu(A \cap F_n) = \sum_{p=1}^n \mu(A \cap E_p)$ untuk

setiap A .

Himpunan F_n terukur maka $\mu(A) = \mu(A \cap F_n) + \mu(A \cap F_n^C)$

$$\geq \mu(A \cap F_n) + \mu(A \cap E^C)$$

yang berakibat $\mu(A) \geq \sum_{p=1}^n \mu(A \cap E_p) + \mu(A \cap E^C)$ untuk setiap n .

Hal ini berarti $\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n) + \mu(A \cap E^C)$.

Diperoleh $\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n) + \mu(A \cap E^C)$

$$\geq \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C)$$

Jadi terbukti bahwa $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ terukur. $\square$

Teorema 1.2.18 *Setiap interval merupakan himpunan terukur.*

Bukti: Misalkan $a \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa interval buka (a, ∞) adalah himpunan terukur.

Ambil sebarang himpunan A .

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat koleksi interval $\{I_p\}$ sedemikian hingga $A \subseteq \cup I_p$ dan jumlah panjang interval tersebut kurang dari $\mu(A) + \varepsilon$.

Misalkan $I_p^* = I_p \cap (a, \infty)$ dan $I_p^{**} = I_p \cap (-\infty, a]$ untuk setiap bilangan Asli p . Diperoleh

- 1) I_p^* dan I_p^{**} masing-masing merupakan interval atas himpunan kosong
- 2) $I_p = I_p^* \cup I_p^{**}$ dan $I_p^* \cap I_p^{**} = \emptyset$ untuk setiap p .

Lebih lanjut diperoleh

$$B = A \cap (a, \infty) \subseteq \cup I_p^* \text{ dan}$$

$$D = A \cap (-\infty, a] \subseteq \cup I_p^{**}$$

sehingga $\mu(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(I_p^*)$ dan $\mu(D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(I_p^{**})$.

Dari dua pertidaksamaan terakhir diperoleh

$$\mu(A \cap (a, \infty)) + \mu(A \cap (-\infty, a]) = \mu(B) + \mu(D)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(I_p^*) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta(I_p^{**})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\eta(I_p^*) + \eta(I_p^{**}))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \eta(I_p)$$

$$< \mu(A) + \varepsilon$$

Jadi $\mu(A \cap (a, \infty)) + \mu(A \cap (-\infty, a]) \leq \mu(A)$,

Terbukti bahwa (a, ∞) terukur. $\square$

Akibat 1.2.19 *Interval-interval $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) , $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$ dan $[a, \infty)$ adalah himpunan terukur.*

Bukti: Karena untuk setiap $a \in R$, interval (a, ∞) terukur maka,

$$(-\infty, a] = (a, \infty)^c \quad \text{terukur}, \quad [a, \infty) = \{a\} \cup (a, \infty) \quad \text{terukur},$$

$$(-\infty, a) = [a, \infty)^c \quad \text{terukur}, \quad [a, b] = (-\infty, b] \cap [a, \infty) \quad \text{terukur},$$

$$(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, \infty) \quad \text{terukur}, \quad [a, b) = (-\infty, b) \cap [a, \infty) \quad \text{terukur}, \text{ dan}$$

$$(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty) \quad \text{juga terukur.}$$

Bukti selesai. $\square$

Untuk sebarang himpunan terbuka dan tertutup di R juga merupakan himpunan terukur.

Teorema 1.2.20 *Setiap himpunan terbuka dan himpunan tertutup adalah himpunan terukur.*

Karena gabungan atau irisan dua atau lebih himpunan terukur merupakan himpunan terukur dan sebarang himpunan terbuka dapat dinyatakan sebagai gabungan berhingga dari interval-interval buka yang mana interval buka merupakan himpunan terukur, maka himpunan terbuka juga merupakan himpunan terukur. Karena himpunan terbuka adalah terukur dan complemen himpunan terbuka yaitu himpunan tertutup, maka himpunan tertutup juga terukur.

Teorema 1.2.21 Terdapat himpunan yang tidak terkur.

Bukti: Misalkan $x, y \in [0,1]$.

Didefinisikan relasi " $\sim$ " pada R oleh $x \sim y$ jika $x - y$ rasional (relasi $\sim$ adalah relasi equivalen, yaitu relasi yang bersifat refleksif, simetris dan transitif). Relasi ini adalah koleksi dari kelas-kelas equivalensi dalam bentuk $\{x + r \mid r \in Q\}$, dan untuk setiap kelas equivalensi berisi titik pada $[0,1]$.

Misalkan $E \subseteq [0,1]$ himpunan yang berisi satu titik dari setiap kelas equivalensi. Misalkan juga bahwa $[-1,1] \cap Q = \{r_i\}$ dan

$$E_i = E + r_i, \text{ untuk setiap } i.$$

$$= \{x + r_i : x \in E\}$$

Dapat dipahami bahwa, $[0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq [-1,2]$. Misalkan $x \in [0,1]$.

Terdapat $y \in E$ sedemikian sehingga $x - y$ rasional.

Karena $-1 \leq x - y \leq 1$, maka ada indeks j sedemikian sehingga

$$x - y = r_j.$$

Dengan demikian $x = y + r_j \in E_j$.

Himpunan

Selanjutnya $E_i \cap E_j = \emptyset$ dengan $i \neq j$. Dengan cara lain, ada $y, z \in E$ sedemikian hingga $y + r_i = z + r_j$ yang berakibat bahwa $y \sim z$. Hal ini kontradiksi jika $i = j$.

Andaikan E adalah himpunan terukur, maka untuk setiap himpunan E_i juga terukur dan $\mu(E_i) = \mu(E)$. Oleh karena itu,

$$1 \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E) \leq 3$$

Hal ini kontradiksi sebab $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E) = 0$. Jadi, E tidak terukur. $\square$

BAB 2

Barisan Fungsi

Pada bab ini, dibahas barisan dengan suku-suku berupa fungsi bernilai real. Barisan fungsi muncul secara alami dalam analisis real dan sangat berguna dalam memperoleh pendekatan suatu fungsi yang diberikan dan mendefinisikan suatu fungsi baru yang diketahui. Dalam hal ini, akan dibicarakan dua pengertian konvergensi barisan, yaitu konvergensi pointwise (konvergen) dan konvergensi seragam. Konvergensi seragam sangatlah penting, fakta bahwa konvergensi seragam mempertahankan sifat tertentu dalam arti jika setiap suku dari barisan fungsi yang konvergen seragam memiliki sifat tertentu, katakanlah sifat p , maka limit fungsinya juga memiliki sifat p .

Diberikan definisi tentang barisan fungsi yang konvergen dan konvergen seragam serta fungsi terbatas dan kaitannya.

Pada kekonvergenan barisan bilangan real adanya bilangan asli n_0 bergantung pada bilangan ε . Akan tetapi pada barisan fungsi dengan diberikannya interval, maka adanya n_0 selain bergantung pada bilangan ε juga ditentukan oleh nilai x .

Definisi 2.1 Diberikan fungsi $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ untuk setiap bilangan asli n . Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen pointwise (konvergen) ke fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pada $[a, b]$ jika untuk setiap $x \in [a, b]$ barisan $\{f_n(x)\}$ konvergen ke $f(x)$.

Barisan Fungsi

Jadi, barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen ke fungsi f jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x \in [a, b]$ terdapat bilangan asli $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Contoh 2.2 Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan fungsi $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oleh

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x, \quad x \in \mathbb{R},$$

maka barisan $\{f_n\}$ konvergen ke $f(x) = 0$.

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa barisan $\{f_n\}$ konvergen ke f .

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$f_1(x) = x; \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x; \quad f_3(x) = \frac{1}{3}x$$

$\vdots$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x$$

Diambil sebarang $x \in \mathbb{R}$ sehingga $f_n(x) = \frac{1}{n}x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli n_0 dengan

sifat $\frac{|x|}{\varepsilon} < n_0$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n}x - 0 \right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|}{n_0} < \varepsilon.$$

Jadi barisan fungsi $\{f_n(x)\}$ konvergen ke $f(x) = 0$.

Karena $x \in R$ diambil sebarang, diperoleh barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke f .

Pada kekonvergenan pointwise, adanya n_0 selain bergantung pada bilangan ε juga ditentukan oleh nilai x . Jika adanya n_0 hanya bergantung pada bilangan ε (adanya n_0 berlaku untuk setiap x yang diberikan), maka kekonvergenan ini dinamakan konvergen seragam.

Definisi 2.3 Diberikan fungsi $f_n : [a, b] \rightarrow R$ untuk setiap $n \in N$. Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen seragam ke fungsi $f : [a, b] \rightarrow R$ pada $[a, b]$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ dan $x \in [a, b]$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Berdasarkan Definisi 2.3, barisan fungsi $\{f_n\}$ tidak konvergen seragam ke f jika dan hanya jika terdapat bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap bilangan asli n terdapat bilangan asli $n_0 \geq n$ dan terdapat $x \in [a, b]$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0.$$

Barisan fungsi $\{f_n\}$ tidak konvergen seragam ke f jika dan hanya jika terdapat bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian sehingga tidak ada bilangan asli n_0 yang memenuhi

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0,$$

untuk setiap bilangan asli $n_0 \geq n$ dan setiap $x \in [a, b]$.

Barisan Fungsi

Barisan fungsi $\{f_n\}$ tidak konvergen seragam ke f jika dan hanya jika untuk suatu bilangan $\varepsilon_0 > 0$ ada subbarisan $\{f_{n_k}\}$ dari $\{f_n\}$ dan barisan $\{x_k\}$ pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0,$$

untuk semua $k \in N$.

Contoh 2.4 Untuk setiap $n \in N$ didefinisikan fungsi $f_n : R \rightarrow R$ oleh

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x, \quad x \in R.$$

Barisan $\{f_n\}$ tidak konvergen seragam ke f .

Bukti: Pilih $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$ maka terdapat barisan $\{n_k\}$ dengan $n_k = k$ dan terdapat barisan $\{x_k\}$ dengan $x_k = k$ sehingga berlaku

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| = |f_k(k) - f(x)| = \left| \frac{1}{k}k - 0 \right| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

Jadi, barisan fungsi $\{f_n\}$ tidak konvergen seragam ke f .

Contoh 2.5 Untuk setiap $n \in N$ didefinisikan fungsi $f_n : [0, 1] \rightarrow R$ oleh

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x, \quad x \in [0, 1].$$

Barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[0, 1]$.

Bukti: untuk setiap $x \in [0, 1]$ maka

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n}x - 0 \right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ maka untuk setiap bilangan asli n terdapat bilangan asli n_0 dengan $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ dan $x \in [0,1]$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n}x - 0 \right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Jadi, Barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[0,1]$.

Definisi 2.6 Diberikan fungsi $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan fungsi terbatas pada $[a,b]$ jika terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga berlaku

$$|f(x)| \leq M$$

untuk setiap $x \in [a,b]$.

Jika untuk setiap bilangan $M > 0$ berakibat $|f(x)| > M$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka dikatakan fungsi f tidak terbatas pada $[a,b]$.

Perhatikan bahwa jika $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi terbatas, maka diperoleh

$$\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$$

terbatas di $\mathbb{R}$.

Akibatnya

$$\sup \{|f(x)| : x \in [a,b]\}$$

ada di $\mathbb{R}$.

Koleksi semua fungsi terbatas $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ dinotasikan $B[a,b]$. Beberapa contoh fungsi yang terbatas adalah fungsi kontinu, fungsi monoton, fungsi bervariasi terbatas, dan lain sebagainya.

Teorema 2.7 Barisan fungsi terbatas $\{f_n\}$ konvergen seragam ke fungsi terbatas f pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ dan $x \in [a, b]$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad \square$$

Seperti halnya dalam barisan bilangan real, ada barisan Cauchy. Pada barisan fungsi juga dikenal barisan Cauchy.

Definisi 2.8 Barisan $\{f_n\} \subseteq B[a, b]$ dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

untuk setiap bilangan asli $n, m \geq n_0$ dan $x \in [a, b]$.

Kriteria Cauchy untuk kekonvergenan seragam.

Teorema 2.9 Jika barisan $\{f_n\} \subseteq B[a, b]$, maka terdapat $f \in B[a, b]$ dengan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f jika dan hanya jika $\{f_m - f_n\}$ konvergen ke 0 untuk setiap $m, n \rightarrow \infty$.

Bukti: ($\Rightarrow$) Diketahui barisan $\{f_n\} \subseteq B[a, b]$ konvergen seragam katakan ke $f \in B[a, b]$. Menurut teorema, maka $\{f_n\} \subseteq B[a, b]$ konvergen ke $f \in B[a, b]$. Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ berlaku

$$|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Oleh karena itu, untuk setiap $n, m \in N$ dengan $n, m \geq n_0$ diperoleh

$$\begin{aligned} |f_n - f_m| &= |f_n - f + f - f_m| \\ &\leq |f_n - f| + |f - f_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Diketahui $\{f_m - f_n\}$ konvergen ke 0 untuk setiap $m, n \rightarrow \infty$.

Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Berarti terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n, m \in N$ dengan $n, m \geq n_0$ berlaku

$$|f_n - f_m| < \varepsilon.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\sup \{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in [a, b]\} < \varepsilon.$$

Hal ini berakibat untuk setiap $x \in [a, b]$ berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Artinya bahwa $\{f_n(x)\} \subseteq R$ merupakan barisan Cauchy.

Karena R lengkap, maka setiap barisan Cauchy akan konvergen katakan ke suatu f .

Jadi, untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n \in N$ dengan $n \geq n_0$ berlaku

$$|f_n - f| < \varepsilon.$$

Oleh karena itu untuk setiap $x \in [a, b]$ diperoleh

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $f \in B[a, b]$.

Diambil $\varepsilon = 1$, maka $|f_n(x) - f(x)| < 1$.

Karena untuk setiap $n \in N$, f_n fungsi terbatas, maka terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga $|f_n(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

Akibatnya

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \\ &< 1 + M. \end{aligned}$$

Jadi, terdapat bilangan real $M^* = 1 + M > 0$ sehingga $|f(x)| \leq M^*$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

Jadi, $f \in B[a, b]$.

Oleh karena itu, barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[a, b]$. $\square$

Sifat yang dimiliki pada setiap fungsi f_n juga akan dimiliki oleh limit fungsinya, asalkan barisan fungsi tersebut konvergen seragam.

Teorema 2.10 Diketahui barisan $\{f_n\} \subseteq B[a, b]$ konvergen seragam ke f pada $[a, b]$. Jika f_n kontinu di $c \in [a, b]$ untuk setiap $n \in N$, maka f kontinu di $c \in [a, b]$.

Bukti: Diketahui barisan $\{f_n\} \subseteq B[a, b]$ konvergen seragam ke f pada $[a, b]$. Berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ dan $x \in [a, b]$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Karena f_n kontinu di $c \in [a, b]$ untuk setiap $n \in N$, maka terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $|x - c| < \delta$ berlaku

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Oleh karena itu untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $|x - c| < \delta$ diperoleh

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| + |f_{n_0}(c) - f(c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi, f kontinu di $c \in [a, b]$. $\square$

Contoh 2.11 Diberikan barisan fungsi $\{f_n\}$ pada $[0, 2]$ dengan rumus

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n} \text{ untuk setiap } x \in [0, 2] \text{ dan } n \in N.$$

$$f_1(x) = x + 1,$$

$$f_2(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$f_3(x) = x + \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}$$

Barisan Fungsi

Barisan $\{f_n\}$ merupakan barisan Cauchy lebih lanjut barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke $f(x) = x$ dan kontinu pada $[0, 2]$. Jelas bahwa $f(x) = x$ kontinu pada $[0, 2]$.

Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, sehingga menurut sifat Archimedian terdapat bilangan asli n_0 sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Oleh karena itu untuk setiap $m, n \in N$ (asumsikan $m > n$) dan jika $m, n \geq n_0$ dan $x \in [0, 2]$ maka berlaku

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= \left| \left(x + \frac{1}{n}\right) - \left(x + \frac{1}{m}\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi, $\{f_n\}$ barisan Cauchy.

Karena $\{f_n\}$ barisan Cauchy, maka menurut Teorema 2.9 bahwa barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam.

BAB 3

Ruang Banach

Ruang bernorma adalah ruang vector yang dilengkapi oleh suatu norma. Jika ruang bernorma itu lengkap, maka disebut ruang Banach. Teori ruang bernorma, khususnya ruang Banach, dan teori operator linear merupakan bagian yang paling berkembang dalam analisis fungsional.

Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap, yaitu setiap barisan Cauchy di dalam ruang bernorma itu adalah konvergen. Terkait ruang Banach dan ruang dualnya akan dibicarakan terlebih dahulu mengenai ruang bernorma (*normed space*) atas lapangan himpunan semua bilangan real R .

3.1 Ruang Bernorma

Definisi dari ruang bernorma dan beberapa sifat-sifatnya.

Definisi 3.1.1 Diketahui X ruang linear (ruang vektor) atas lapangan R .

Fungsi $\|\cdot\|: X \rightarrow R$ yang mempunyai sifat-sifat:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0, \forall x \in X$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in X \text{ dan skalar } \alpha \in R, \text{ dan}$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$$

disebut norma pada X .

Jika pada (N1) hanya dipenuhi $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ dan $x = \theta \Rightarrow \|x\| = 0$ maka disebut seminorma pada X .

Selanjutnya pasangan $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang bernorma (*normed space*).

Dalam hal norma pada X sudah tertentu, ruang bernorma $(X, \|\cdot\|)$ cukup ditulis ruang bernorma X .

Contoh 3.1.2 Diberikan beberapa contoh ruang bernorma.

- (i) Himpunan semua bilangan riil R merupakan ruang bernorma terhadap norma

$$\|x\| = |x|,$$

untuk setiap $x \in R$.

Bukti: ditunjukkan untuk setiap $x, y \in R$ dan sebarang $\alpha \in R$ memenuhi tiga aksioma tersebut, yaitu

$$(N1) \quad \|x\| = |x| \geq 0, \quad \forall x \in R$$

$$\|x\| = |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha x| = |\alpha| |x| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall x \in R \text{ dan skalar } \alpha \in R, \text{ dan}$$

$$(N3) \quad \|x + y\| = |x + y| \leq |x| + |y| = \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in R.$$

Jadi, $(R, \|\cdot\|)$ dengan norma tersebut merupakan ruang bernorma.

- (ii) Diberikan $X = R^n$ maka $(R^n, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma terhadap norma

$$\|\bar{x}\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad \text{dan} \quad \|\bar{x}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

- (iii) $X = \ell_p = \left\{ \tilde{x} = \{x_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$ merupakan ruang bernorma

terhadap norma

$$\|\tilde{x}\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty.$$

Selanjutnya $X = \ell_{\infty} = \left\{ \tilde{x} = \{x_k\} : \sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty \right\}$ merupakan ruang bernorma terhadap norma

$$\|\tilde{x}\|_{\infty} = \sup_{k \geq 1} |x_k|.$$

(iv) Koleksi semua fungsi kontinu pada $[a, b]$ juga merupakan ruang bernorma terhadap norma

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \},$$

untuk setiap f fungsi kontinu pada $[a, b]$.

Bukti: Misalkan $C[a, b]$ merupakan koleksi semua fungsi kontinu pada $[a, b]$.

Untuk setiap $f, g \in C[a, b]$ dan sebarang skalar $\alpha \in R$ berlaku

$$(N1) \quad \|f\| = \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \} \geq 0, \forall f \in C[a, b]$$

$$\begin{aligned} \|f\| = \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \} = 0 &\Leftrightarrow |f(x)| = 0, \forall x \in [a, b] \\ &\Leftrightarrow f = \theta. \end{aligned}$$

$$(N2) \quad \|\alpha f\| = \sup \{ |\alpha f(x)| : x \in [a, b] \}$$

$$= |\alpha| \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \}$$

$$= |\alpha| \|f\|, \forall f \in C[a, b], \text{ dan skalar } \alpha \in R, \text{ dan}$$

$$(N3) \quad \|f + g\| = \sup \{ |f(x) + g(x)| : x \in [a, b] \}$$

$$\leq \sup \{ |f(x)| + |g(x)| : x \in [a, b] \}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \} + \sup \{ |g(x)| : x \in [a, b] \} \\
 &= \|f\| + \|g\|, \quad \forall f, g \in C[a, b].
 \end{aligned}$$

Jadi, $(C[a, b], \|\cdot\|)$ dengan norma tersebut merupakan ruang bernorma.

- (v) Koleksi semua fungsi terbatas pada $[a, b]$, yaitu $B[a, b]$ merupakan ruang bernorma terhadap norma

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \},$$

untuk setiap $f \in B[a, b]$.

Bukti: Misalkan $B[a, b]$ merupakan koleksi semua fungsi terbatas pada $[a, b]$.

Untuk setiap $f, g \in B[a, b]$ dan sebarang skalar $\alpha \in R$ berlaku

$$(N1) \quad \|f\| = \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \} \geq 0, \quad \forall f \in B[a, b]$$

$$\begin{aligned}
 \|f\| = \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \} = 0 &\Leftrightarrow |f(x)| = 0, \quad \forall x \in [a, b] \\
 &\Leftrightarrow f = \theta.
 \end{aligned}$$

$$(N2) \quad \|\alpha f\| = \sup \{ |\alpha f(x)| : x \in [a, b] \}$$

$$= |\alpha| \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \}$$

$$= |\alpha| \|f\|, \quad \forall f \in B[a, b], \text{ dan skalar } \alpha \in R, \text{ dan}$$

$$(N3) \quad \|f + g\| = \sup \{ |f(x) + g(x)| : x \in [a, b] \}$$

$$\leq \sup \{ |f(x)| + |g(x)| : x \in [a, b] \}$$

$$= \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \} + \sup \{ |g(x)| : x \in [a, b] \}$$

$$= \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in B[a, b].$$

Jadi, $(B[a, b], \|\cdot\|)$ dengan norma tersebut merupakan ruang bernorma.

Diberikan definisi ruang metrik dan kaitannya dengan ruang bernorma.

Definisi 3.1.3 Diketahui himpunan $X \neq \emptyset$. Fungsi $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan metrik jika memenuhi sifat-sifat:

$$(M1) \quad \rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X,$$

$$(M2) \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(M3) \quad \rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X, \text{ dan}$$

$$(M4) \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in X.$$

Himpunan X yang dilengkapi metrik ρ disebut ruang metrik (Metric space) dan ditulis (X, ρ) atau X saja asalkan metriknya telah diketahui.

Contoh 3.1.4 Diberikan beberapa contoh ruang metrik.

- (1) Himpunan $X = \mathbb{R}$, yaitu himpunan semua bilangan real dengan $\rho(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ maka $(\mathbb{R}, \rho)$ ruang metrik.

Bukti: Ditunjukkan bahwa $\rho(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ merupakan metrik.

$$(i) \quad \rho(x, y) = |x - y| \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad \rho(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(iii) \quad \rho(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = \rho(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$(iv) \quad \rho(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)|$$

$$\begin{aligned} &\leq |x - z| + |z - y| \\ &= \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in X \end{aligned}$$

Karena ρ merupakan metrik, maka (R, ρ) ruang metrik.

(2) Misalkan $X = R^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2) \in R^2$ dengan

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ \left(|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \end{cases},$$

Maka (X, ρ) ruang metrik.

(3) Misalkan $X = R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$ merupakan ruang metrik terhadap metrik

$$\begin{aligned} \rho_\infty(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} \\ \rho_p(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Bukti: dibuktikan (R^n, ρ_∞) ruang metrik.

$$(i) \quad \rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} \geq 0$$

$$(ii) \quad \rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = 0 \Leftrightarrow x_i - y_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow x = y.$$

$$(iii) \quad \rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|y_i - x_i|\} = \rho_\infty(y, x), \forall x, y \in R^n$$

$$\begin{aligned}
\text{(iv) } \rho_{\infty}(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|(x_i - z_i) + (z_i - y_i)|\} \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|(x_i - z_i)| + |(z_i - y_i)|\} \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - z_i|\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{|z_i - y_i|\} \\
&= \rho_{\infty}(x, z) + \rho_{\infty}(z, y), \quad \forall x, y, z \in R^n.
\end{aligned}$$

Lemma 3.1.5 (Ketaksamaan Young)

Jika $1 < p, q < \infty$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ maka untuk setiap bilangan α, β berlaku

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}.$$

Bukti: Ambil $y = x^{p-1} \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{p-1}} \Leftrightarrow x = y^{q-1}$.

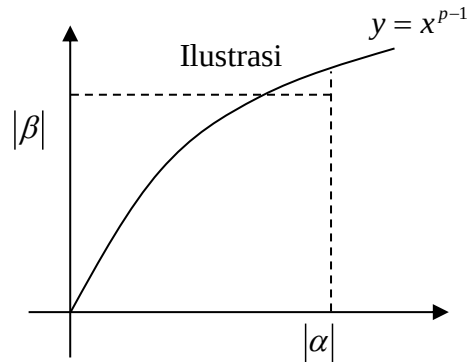
Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p + q = pq \Leftrightarrow q = p(q-1) \text{ atau } p = q(p-1)$$

Sehingga

$$\frac{1}{p-1} = \frac{q}{p} \text{ atau } \frac{q}{p} = q-1.$$

Jadi, $\frac{1}{p-1} = q-1.$



Berdasarkan ilustrasi gambar,

$$|\alpha||\beta| = |\alpha\beta| \leq \text{Luas area di atas kurva} + \text{luas area di bawah kurva}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{y=0}^{|\beta|} y^{q-1} dy + \int_{x=0}^{|\alpha|} x^{p-1} dx \\
 &= \frac{1}{q} y^q \Big|_0^{|\beta|} + \frac{1}{p} x^p \Big|_0^{|\alpha|} \\
 &= \frac{|\beta|^q}{q} + \frac{|\alpha|^p}{p}.
 \end{aligned}$$

Lemma 3.1.6 (Ketaksamaan Holder)

Jika $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ dan $1 < p, q < \infty$ dengan

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ maka}$$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

$$\text{dengan } \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ dan } \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bukti: Menurut ketaksamaan segitiga berlaku bahwa

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in R, \text{ maka jelas bahwa}$$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i|.$$

Selanjutnya diperlihatkan bahwa

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right) \left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \right) \leq 1.$$

Menurut Ketaksamaan Young

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right) \left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \right) &\leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p} \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \right)^q \right) \\
&= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\|x\|_p} \right)^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\|y\|_q} \right)^q \sum_{i=1}^n |y_i|^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right) \left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \right) \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Lemma 3.1.7 (Ketaksamaan Minkowski)

Jika $x, y \in R^n$ dan $p \geq 1$, maka $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, dengan

$$\|x\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \text{ dan } \|y\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|.$$

Bukti: Untuk setiap $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$, didefinisikan

$$\begin{aligned}
x + y &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).
\end{aligned}$$

Kasus $p = \infty$

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i + y_i| \} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i| + |y_i| \} \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i| \} + \max_{1 \leq i \leq n} \{ |y_i| \} \\
&= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Kasus $p = 1$

$$\begin{aligned}\|x + y\|_1 &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \right)^1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1.\end{aligned}$$

Kasus $1 < p < \infty$

Ambil $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, maka

$$\begin{aligned}|x_i + y_i|^p &= |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1} \\ &= |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}\end{aligned}$$

Sehingga

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}.$$

Menurut Ketaksamaan Holder diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

karena

$$p = q(p-1) \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
 \frac{\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}} &\leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \\
 &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \\
 &\Leftrightarrow \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.
 \end{aligned}$$

Contoh 3.1.8 Diberikan contoh beberapa ruang metrik.

(1) Misalkan $X = R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$ merupakan ruang metrik terhadap metrik

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x - y\|_p.$$

Bukti:

$$(i) \quad \rho_p(x, y) = \|x - y\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0, \quad \forall x, y \in R^n$$

$$(ii) \quad \rho_p(x, y) = \|x - y\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow x_i = y_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow x = y.$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad \rho_p(x, y) &= \|x - y\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|y - x\|_p = \rho_p(y, x), \\
 &\quad \forall x, y \in R^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad \rho_p(x, y) &= \|x - y\|_p = \|(x - z) + (z - y)\|_p \\
 &\leq \|x - z\|_p + \|z - y\|_p = \rho_p(x, z) + \rho_p(z, y), \\
 &\quad \forall x, y, z \in R^n.
 \end{aligned}$$

Jadi, $X = R^n$ merupakan ruang metrik terhadap metrik

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x - y\|_p.$$

(2) Misalkan $c[a, b]$ koleksi semua fungsi kontinu pada $[a, b]$, merupakan ruang metrik terhadap metrik ρ ,

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \rho(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\
 \text{(ii)} \quad \rho_\infty(f, g) &= \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x) - g(x)|\}.
 \end{aligned}$$

Himpunan semua bilangan real R merupakan ruang metrik biasa (usual) terhadap metrik

$$\rho(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in R.$$

Sebarang himpunan X merupakan ruang metrik diskrit terhadap metrik diskrit

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \neq y \\ 0, & \text{jika } x = y \end{cases}.$$

Teorema 3.1.9 *Setiap ruang bernorma $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang metrik (X, d) terhadap metrik d ,*

$$d(x, y) = \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X.$$

Bukti: Diketahui $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma, maka

$$(M1) \quad d(x, y) = \|x - y\| \geq 0, \quad \forall x, y \in X,$$

$$(M2) \quad d(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(M3) \quad d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$$

$$\forall x, y \in X, \text{ dan}$$

$$(M4) \quad d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X.$$

Terbukti bahwa setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik. $\square$

Lemma 3.1.10 (Translasi Invarian) *Metrik ρ yang diinduksi oleh norma pada ruang bernorma X memenuhi*

$$(i) \quad \rho(x + a, y + a) = \rho(x, y)$$

$$(ii) \quad \rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \rho(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar α .

Bukti: Melalui metrik

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \text{ untuk setiap } x, y \in X.$$

Sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dan skalar α diperoleh

$$\rho(x + a, y + a) = \|(x + a) - (y + a)\| = \|x - y\| = \rho(x, y)$$

$$\rho(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x - y)\| = |\alpha| \|x - y\| = |\alpha| \rho(x, y). \quad \square$$

Ruang Banach merupakan ruang bernorma yang lengkap, yaitu setiap barisan Cauchy di dalamnya adalah barisan yang konvergen.

Definisi 3.1.11 Diketahui ruang bernorma X . Barisan $\{x_n\} \subset X$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n \in N$ dengan $n \geq n_0$ berlaku

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Definisi 3.1.12 Diketahui ruang bernorma X . Barisan $\{x_n\} \subset X$ dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Setiap barisan konvergen di dalam ruang bernorma merupakan barisan Cauchy. Akan tetapi setiap barisan Cauchy di dalam ruang bernorma belum tentu konvergen. Jika setiap barisan Cauchy di dalam ruang bernorma adalah konvergen, maka ruang bernorma tersebut dikatakan lengkap.

Teorema 3.1.13 Setiap barisan konvergen pada ruang bernorma X merupakan barisan Cauchy.

Bukti: Diambil barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen ke $x \in X$. Berarti untuk untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ dan } \|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Akibatnya untuk setiap bilangan asli $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \|x_n - x + x - x_m\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi, barisan $\{x_n\} \subset X$ merupakan barisan Cauchy. $\square$

Definisi 3.1.14 Ruang bernorma X dikatakan lengkap (complete) jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Ruang bernorma yang lengkap disebut ruang Banach.

Jika ada barisan Cauchy di dalam ruang bernorma yang tidak konvergen, maka ruang bernorma itu dikatakan tidak lengkap atau bukan merupakan ruang Banach.

Contoh 3.1.15 Koleksi semua fungsi kontinu pada $[a, b]$ merupakan ruang Banach terhadap norma

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \}.$$

Bukti: Telah ditunjukkan bahwa koleksi semua fungsi kontinu pada $[a, b]$ dinotasikan $C[a, b]$ terhadap norma tersebut merupakan ruang bernorma. Sekarang akan ditunjukkan bahwa sebarang barisan Cauchy di $C[a, b]$ konvergen ke suatu fungsi di $C[a, b]$.

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{f_n\} \subset C[a, b]$, yaitu $f_1, f_2, f_3, \dots \in C[a, b]$. Oleh karena itu untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku

$$d(f_m, f_n) = \|f_m - f_n\| = \sup \{|f_m(x) - f_n(x)| : x \in [a, b]\} < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Hal ini berarti bahwa jika $m, n \geq n_0$ berlaku

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{5},$$

untuk setiap $x \in [a, b]$.

Oleh karena itu untuk setiap $x \in [a, b]$ barisan $\{f_n(x)\}$ merupakan barisan Cauchy di R . Karena R lengkap, maka barisan Cauchy tersebut konvergen di R . Katakan konvergen ke $f(x) \in R$.

Jadi, untuk setiap $x \in [a, b]$ terdapat $f(x) \in R$ sehingga

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Diperoleh juga bahwa untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Hal ini menunjukkan bahwa f merupakan fungsi yang terdefinisi pada $[a, b]$. Akan ditunjukkan fungsi $f \in C[a, b]$.

Karena $f_1, f_2, f_3, \dots \in C[a, b]$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ fungsi f_n kontinu pada $[a, b]$. Lebih lanjut, f_n kontinu seragam pada $[a, b]$.

Oleh karena itu, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ tersebut di atas terdapat bilangan $\delta > 0$ yang tidak bergantung pada $x \in [a, b]$ sehingga jika $x, y \in [a, b]$ dan $|x - y| < \delta$ berlaku

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Jadi, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ tersebut di atas terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $x, y \in [a, b]$ dan $|x - y| < \delta$ berlaku

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| \\ &\quad + |f_n(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa fungsi f kontinu pada $[a, b]$.

Jadi, $f \in C[a, b]$.

Jadi, $C[a, b]$ merupakan ruang Banach.

Contoh 3.1.16 Koleksi semua fungsi kontinu pada $[a, b]$ bukan ruang Banach terhadap norma

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Bukti: Dapat ditunjukkan bahwa $C[a,b]$ dengan norma tersebut merupakan ruang bernorma. Akan ditunjukkan dengan norma tersebut, $C[a,b]$ bukan merupakan ruang Banach (tidak lengkap). Artinya ada barisan Cauchy di $C[a,b]$ tetapi tidak konvergen.

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Diperoleh $f_n \in C\left[0, \frac{1}{n}\right] \cap C\left(\frac{1}{n}, 1\right]$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^-} nx = 1 = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^+} f_n(x).$$

Jadi, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}} f_n(x) = 1 = f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

Oleh karena itu diperoleh $f_n \in C[0,1]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Diambil sebarang $m, n \in \mathbb{N}$, asumsikan $m > n$ maka

$$\begin{aligned} \rho(f_m, f_n) &= \|f_m - f_n\| = \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \\ &= \frac{m-n}{2mn} \\ &\leq \frac{m}{mn} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$, maka menurut sifat Archimedian terdapat bilangan asli n_0 sedemikian sehingga $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Jadi, untuk setiap $m, n \geq n_0$ diperoleh

$$\rho(f_m, f_n) = \|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\{f_n\}$ barisan Cauchy di $C[0,1]$.

Sekarang ditunjukkan $\{f_n\}$ barisan Cauchy di $C[0,1]$ tidak konvergen di $C[0,1]$.

Andaikan $\{f_n\}$ konvergen ke $f \in C[0,1]$, maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, f) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)| dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

Diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} |nx - f(x)| dx = 0,$$

diperoleh $f(x) = 0, x = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 |1 - f(x)| dx = 0,$$

diperoleh $f(x) = 1, x \in (0,1]$.

$$\text{Jadi, } f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, 1] \end{cases}.$$

Hal ini jelas bahwa $f(x)$ tidak kontinu di $x = 0$. Jadi $f \notin C[0, 1]$. Oleh karena itu, $C[0, 1]$ dengan norma tersebut bukan merupakan ruang Banach.

Contoh 3.1.17 Diberikan $X = R^n$ maka R^n merupakan ruang Banach terhadap norma

$$\|\bar{x}\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \quad \text{dan} \quad \|\bar{x}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

3.2 Fungsi Kontinu pada Ruang Bernorma

Telah diketahui setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik. Seperti halnya pembicaraan fungsi kontinu pada ruang metrik. Berdasarkan konsep tersebut, dikembangkan dan dibicarakan fungsi kontinu linear dari ruang bernorma ke ruang bernorma lain. Berikut ini definisi fungsi kontinu dan fungsi linear pada suatu ruang bernorma.

Definisi 3.2.1 Diberikan dua ruang bernorma X dan Y . Fungsi $f : X \rightarrow Y$ dikatakan linear jika memenuhi

- (i) $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in X$ dan
- (ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall x \in X$ dan skalar α .

Definisi 3.2.2 Diberikan dua ruang bernorma X dan Y . Fungsi $f : X \rightarrow Y$ dikatakan kontinu di $x \in X$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $y \in X$ dan $\|x - y\|_X < \delta$ berakibat

$$\|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon.$$

Selanjutnya fungsi f dikatakan kontinu pada $A \subset X$ jika f kontinu di setiap $x \in A$.

Bilangan $\delta > 0$ pada Definisi 3.2.2 selain bergantung pada ε juga pada $x \in X$. Jika ada bilangan $\delta > 0$ yang hanya ditentukan oleh bilangan ε , maka diperoleh definisi kontinu seragam.

Definisi 3.2.3 Diberikan dua ruang bernorma X dan Y . Fungsi $f : X \rightarrow Y$ dikatakan kontinu seragam pada $A \subset X$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sehingga

$$\|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon$$

untuk setiap $x, y \in A$ dengan $\|x - y\| < \delta$.

Jika fungsi f kontinu seragam pada X , maka fungsi f tersebut kontinu pada X . Sedangkan sebaliknya belum tentu berlaku.

Berikut, beberapa teorema yang berkaitan dengan fungsi kontinu.

Teorema 3.2.4 Diketahui X dan Y dua ruang bernorma. Fungsi $f : X \rightarrow Y$ kontinu di $c \in X$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen di $c \in X$ berakibat barisan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke $f(c)$.

Bukti: Diketahui fungsi f kontinu di $c \in X$. Ditunjukkan untuk setiap barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen di $c \in X$ berakibat barisan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke $f(c)$.

Diambil sebarang barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen di $c \in X$. Karena fungsi f kontinu di $c \in X$, maka untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in X$ dengan sifat $\|x - c\| < \delta$ berlaku

$$\|f(x) - f(c)\| < \varepsilon.$$

Untuk $\delta > 0$ di atas, karena barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen di $c \in X$ maka terdapat bilangan asli n_0 sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku

$$\|x_n - c\| < \delta.$$

Oleh karena itu, jika $n \geq n_0$ maka $\|x_n - c\| < \delta$ sehingga

$$\|f(x_n) - f(c)\| < \varepsilon.$$

Jadi, barisan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke $f(c)$.

Sebaliknya diketahui untuk setiap barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen di $c \in X$ berakibat barisan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke $f(c)$ dan ditunjukkan fungsi f kontinu di $c \in X$.

Andaikan fungsi f tidak kontinu di $c \in X$. Jadi terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat $x \in X$ dengan sifat $\|x - c\| < \delta$ akan tetapi

$$\|f(x) - f(c)\| \geq \varepsilon_0.$$

Hal ini berarti untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat $x_n \in X$ dengan sifat $\|x_n - c\| < \delta$ akan tetapi

$$\|f(x_n) - f(c)\| \geq \varepsilon_0.$$

Kontradiksi dengan yang diketahui.

Jadi yang benar fungsi f kontinu di $c \in X$. $\square$

Teorema 3.2.5 Jika X dan Y masing-masing ruang bernorma dan $f : X \rightarrow Y$ fungsi linear maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :

- (i). f kontinu pada X ,
- (ii). f kontinu di $\theta \in X$,
- (iii). f kontinu di setiap $x_0 \in X$,
- (iv). Himpunan $\{\|f(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$ terbatas, dan
- (v). Terdapat bilangan $M \geq 0$ sehingga $\|f(x)\|_Y \leq M \|x\|_X, \forall x \in X$.

Bukti: (i) $\Rightarrow$ (ii) cukup jelas.

(ii) $\Rightarrow$ (iii), yaitu diketahui fungsi f kontinu di $\theta \in X$. Ditunjukkan fungsi f kontinu di setiap $x_0 \in X$.

Diambil sebarang $x \in X$ dan sebarang barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen ke x . Maka barisan $\{x_n - x\} = \{x_n\} - \{x\}$ konvergen ke $\theta \in X$.

Menurut yang diketahui, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n - x) = f(\theta) = \theta \in Y$.

Karena fungsi $f : X \rightarrow Y$ fungsi linear, maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) - f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n - x) = f(\theta) = \theta.$$

Diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

Jadi, fungsi f kontinu di setiap $x \in X$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv), yaitu diketahui fungsi f kontinu di setiap $x_0 \in X$ dan ditunjukkan himpunan $\{\|f(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$ terbatas.

Andaikan himpunan $\{\|f(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$ tidak terbatas. Berarti untuk setiap bilangan asli n terdapat $x_n \in X$ dengan $\|x_n\| \leq 1$ sehingga $\|f(x_n)\| > n$.

Diperoleh barisan $\{x_n\} \subset X$ dengan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_n)\| = \infty$.

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dibentuk $z_n = \frac{x_n}{n}$.

Diperoleh barisan $\{z_n\} \subset X$ konvergen ke θ , yaitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n}{n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|x_n\| = 0.$$

Karena fungsi f kontinu di θ maka diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(\theta) = \theta \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_n}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{n} = \theta.$$

Hal ini berarti terdapat bilangan $M > 0$ sehingga $\|f(x_n)\| < M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Kontradiksi.

Pengandaikan harus diingkar dan yang benar himpunan $\{\|f(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$ terbatas.

(iv) $\Rightarrow$ (v), yaitu diketahui himpunan $\{\|f(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$ terbatas dan ditunjukkan terdapat bilangan $M \geq 0$ sehingga $\|f(x)\|_Y \leq M \|x\|_X, \forall x \in X$.

Karena himpunan $\{\|f(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$ terbatas, maka terdapat bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $z \in X$ dengan $\|z\| \leq 1$ berlaku $\|f(z)\| \leq M$.

Diambil sebarang $x \in X$ dan $x \neq \theta$.

Dibentuk $y = \frac{x}{\|x\|} \in X$, diperoleh $\|y\| = 1$ dan

$$\|f(y)\| = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| \leq M.$$

Jadi, $\|f(x)\| \leq M \|x\|$.

Jadi terdapat bilangan $M \geq 0$ sehingga $\|f(x)\|_Y \leq M \|x\|_X, \forall x \in X$.

(v) $\Rightarrow$ (i), yaitu diketahui terdapat bilangan $M \geq 0$ sehingga $\|f(x)\|_Y \leq M \|x\|_X, \forall x \in X$ dan ditunjukkan fungsi f kontinu pada X .

Menurut yang diketahui, untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq M \|x - y\|.$$

Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{M+1} > 0$, maka untuk setiap $x, y \in X$ dengan sifat $\|x - y\| < \delta$ berlaku

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\| \leq M \frac{\varepsilon}{M+1} < \varepsilon.$$

Jadi, fungsi f kontinu pada X . $\square$

Berdasarkan Teorema 3.2.5 dapat dikatakan bahwa fungsi linear f kontinu pada X jika dan hanya jika f terbatas pada X .

Selanjutnya dibentuk $\mathcal{L}_c(X, Y)$ yaitu koleksi semua fungsi linear kontinu dari ruang bernorma X ke ruang bernorma Y . Dapat ditunjukkan bahwa $\mathcal{L}_c(X, Y)$ merupakan ruang linear. Sifat $\mathcal{L}_c(X, Y)$ diuraikan sebagai berikut.

Teorema 3.2.6 *Koleksi $\mathcal{L}_c(X, Y)$ merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|\cdot\|$:*

$$\|f\| = \sup \{\|f(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \text{ atau}$$

$$\|f\| = \inf \{M \geq 0 : \|f(x)\| \leq M \|x\|, x \in X\}$$

untuk setiap $f \in \mathcal{L}_c(X, Y)$.

Bukti: Ditunjukkan bahwa $\|\cdot\|$ merupakan norma pada $\mathcal{L}_c(X, Y)$.

(N1). Untuk setiap $f \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ diperoleh

$$\|f\| = \sup \{\|f(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \geq 0$$

$$\text{Selanjutnya } \|f\| = \sup \{\|f(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} = 0 \Leftrightarrow f = \theta,$$

(N2). Jika α skalar dan $f \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ maka $\alpha f \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ dan

$$\|\alpha f\| = \sup \{\|(\alpha f)(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

$$= \sup \{\|\alpha\| \|f(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

$$= |\alpha| \sup \{\|f(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

$$= |\alpha| \|f\|,$$

(N3). Jika $f, g \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ maka $(f + g) \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ dan

$$\begin{aligned}\|f + g\| &= \sup \{ \|(f + g)(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1 \} \\ &\leq \sup \{ \|f(x)\| + \|g(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1 \} \\ &\leq \sup \{ \|f(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1 \} + \sup \{ \|g(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1 \} \\ &= \|f\| + \|g\|.\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\mathcal{L}_c(X, Y)$ ruang bernorma terhadap norma tersebut di atas. $\square$

Teorema 3.2.7 Jika diberikan $\mathcal{L}_c(X, Y)$ maka

- (i) $\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| : x \in X, \|x\| < 1 \}.$
- (ii) Jika $X \neq \{\theta\}$ maka $\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| : x \in X, \|x\| = 1 \}.$
- (iii) Untuk setiap $x \in X, \|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|.$
- (iv) Jika $M \geq 0, \|f(x)\| \leq M \|x\|$ maka $\|f\| \leq M.$

Bukti: (i) katakan $k = \sup \{ \|f(x)\| : x \in X, \|x\| < 1 \}.$

Perhatikan bahwa $\{ \|f(x)\| : x \in X, \|x\| < 1 \} \subseteq \{ \|f(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1 \}.$

Diperoleh

$$k \leq \|f\|.$$

Diambil sebarang $x \in X$ dengan $\|x\| \leq 1.$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dibentuk $y = \frac{x}{\|x\| + \varepsilon}$ sehingga

$$\|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\| + \varepsilon} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\| + \varepsilon} < \|x\| \leq 1 \Leftrightarrow \|y\| < 1.$$

Oleh karena itu $\|f(y)\| \in \{\|f(x)\| : \|x\| < 1\}$.

$$\|f(y)\| = \frac{1}{\|x\| + \varepsilon} \|f(x)\| \leq k \Leftrightarrow \|f(x)\| \leq k(\|x\| + \varepsilon).$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka

$$\|f(x)\| \leq k\|x\|$$

$$\sup\{\|f(x)\| : \|x\| \leq 1\} \leq k \sup\{\|x\| : \|x\| \leq 1\}$$

$$\|f\| \leq k.$$

Karena $\|f\| \leq k$ dan $k \leq \|f\|$, maka $\|f\| = k = \sup\{\|f(x)\| : x \in X, \|x\| < 1\}$.

(ii) Diketahui $X \neq \emptyset$. Katakan $k = \sup\{\|f(x)\| : x \in X, \|x\| = 1\}$.

Karena $\{\|f(x)\| : x \in X, \|x\| = 1\} \subseteq \{\|f(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ maka

$$.k \leq \|f\|.$$

Untuk $y = \frac{x}{\|x\|}$ diperoleh $\|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$.

Akibatnya

$$\begin{aligned} \|f(y)\| \leq k &\Leftrightarrow \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq k \\ &\Leftrightarrow \|f(y)\| \leq k\|x\|. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\sup \{ \|f(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1 \} \leq \sup \{ k \|x\| : x \in X, \|x\| \leq 1 \}$$

$$\Leftrightarrow \|f\| \leq k \sup \{ \|x\| : \|x\| \leq 1 \}$$

Jadi, $\|f\| \leq k$.

Karena $\|f\| \leq k$ dan $k \leq \|f\|$, maka $\|f\| = k = \sup \{ \|f(x)\| : x \in X, \|x\| = 1 \}$.

(iii) Jika $x = \theta$ maka $\|f(x)\| = \|f(\theta)\| = \|\theta\| = 0 \leq \|f\| 0$.

$x \neq \theta$ Jika $x \neq \theta$, didefinisikan $y = \frac{x}{\|x\|}$ diperoleh $\|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$.

Akibatnya

$$\begin{aligned} \|f(y)\| &\leq \|f\| \Leftrightarrow \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|f\| \\ &\Leftrightarrow \|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|. \end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $x \in X$, $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$.

(iv) Diambil $M \geq 0$ sebarang dengan $\|f(x)\| \leq M \|x\|$ untuk setiap $x \in X$

.

$$\sup \{ \|f(x)\| : \|x\| \leq 1 \} \leq M \sup \{ \|x\| : \|x\| \leq 1 \}$$

$$\Leftrightarrow \|f\| \leq M.$$

Jadi, $\|f\| \leq M$. $\square$

Teorema berikut menyatakan bahwa $\mathcal{L}_c(X, Y)$ lengkap tergantung kepada ruang bernorma Y . $\mathcal{L}_c(X, Y)$ merupakan ruang Banach jika Y ruang Banach.

Teorema 3.2.8 *Jika Y ruang Banach maka $\mathcal{L}_c(X, Y)$ ruang Banach.*

Bukti: Diambil sebarang barisan Cauchy $\{f_n\} \in \mathcal{L}_c(X, Y)$.

Berarti untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

Diperoleh, $f_m - f_n \in \mathcal{L}_c(X, Y)$.

Untuk setiap $x \in X$ dan $m, n \geq n_0$ diperoleh

$$\begin{aligned} \|f_m(x) - f_n(x)\| &= \|(f_m - f_n)(x)\| \\ &\leq \|f_m - f_n\| \|x\| < \varepsilon \|x\|. \end{aligned}$$

Jadi untuk setiap $x \in X$, $\{f_n(x)\}$ barisan Cauchy di Y . Karena Y ruang Banach maka untuk setiap $x \in X$, $\{f_n(x)\}$ konvergen katakan ke $y \in Y$.

Jadi untuk setiap $x \in X$ terdapat $y \in Y$ sehingga $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Karena ketunggalan limit, didefinisikan fungsi $f : X \rightarrow Y$ dengan rumus:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \forall x \in X.$$

Ditunjukkan fungsi f linear dan kontinu (terbatas) pada X .

Fungsi f linear, sebab untuk setiap skalar $\alpha, \beta \in R$ dan $x, y \in X$ diperoleh $\alpha x + \beta y \in X$ dan

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha x + \beta y)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\alpha f_n(x)\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \{\beta f_n(y)\} \\
&= \alpha f(x) + \beta f(y)
\end{aligned}$$

Karena $\{f_n\}$ barisan Cauchy di $\mathcal{L}_c(X, Y)$ maka $\{f_n\}$ terbatas. Jadi ada bilangan $M \geq 0$ sehingga $\|f_n\| \leq M, \forall n$.

Karena untuk setiap $x \in X$, $\{f_n(x)\}$ konvergen ke $f(x) \in Y$. Akibatnya $\{\|f_n(x)\|\}$ konvergen ke $\|f(x)\|$.

Dengan demikian

$$\|f_n(x)\| \leq M \|x\|$$

sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x)\| \leq M \|x\|$

$$\left\| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right\| \leq M \|x\| \Leftrightarrow \|f(x)\| \leq M \|x\|.$$

Hal ini berarti f terbatas. Jadi $f \in \mathcal{L}_c(X, Y)$.

Selanjutnya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \text{untuk setiap bilangan } \varepsilon > 0 \text{ terdapat } n_0 \in \mathbb{N}$$

sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

Khusus untuk $\|x\| \leq 1$, maka

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\| &= \sup \{\|(f_n - f)(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup \{\|f_n(x) - f(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Jadi terbukti $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, yaitu barisan Cauchy $\{f_n\}$ konvergen ke f .

Dengan demikian terbukti bahwa $\mathcal{L}_c(X, Y)$ ruang Banach. $\square$

3.3 Ruang Dual

Menurut Teorema 3.2.8, jika Y ruang Banach maka $\mathcal{L}_c(X, Y)$ ruang Banach. Jadi jika $Y = R$ dan karena R lengkap (ruang Banach), maka $\mathcal{L}_c(X, R)$ ruang Banach.

Definisi 3.3.1 Diketahui X ruang bernorma. Dual dari ruang bernorma X , ditulis $X^* = \mathcal{L}_c(X, R)$, dengan R sebagai lapangan dari ruang linear X . Jadi $X^* = \mathcal{L}_c(X, R)$ koleksi semua fungsional linear dan kontinu pada X .

Teorema 3.3.2 Ruang dual X^* dari ruang bernorma X merupakan ruang Banach.

Bukti: Menurut Teorema 3.2.8, karena R lengkap (ruang Banach), maka $X^* = \mathcal{L}_c(X, R)$ ruang Banach. $\square$

Untuk setiap $f \in \mathcal{L}_c(X, R)$ merupakan fungsional linear kontinu dari ruang bernorma X ke lapangan R dan f ini sering disebut fungsional linear kontinu pada X . Sedangkan untuk setiap anggota dari $\mathcal{L}_c(X, X) = \mathcal{L}_c(X)$ disebut operator (fungsi) linear kontinu pada X . $\mathcal{L}_c(X)$ merupakan ruang Banach jika X ruang Banach.

Contoh 3.3.3 Diberikan contoh ruang Banach dan ruang dualnya.

- (1) Jika $X = L_1$ maka dualnya $X^* = (L_1)^* = L_\infty$.
- (2) Jika $X = R$ maka dualnya adalah $X^* = (R)^* = R$.
- (3) Ruang dual dari R^n adalah R^n .

Bukti: Dual dari $X = L_1$ adalah $X^* = (L_1)^* = L_\infty$, yaitu $L_1^* = L_\infty$.

Untuk setiap $y = \{y_n\} \in L_\infty$ dibentuk fungsional f_y pada L_1 oleh

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Diperoleh bahwa f_y linear dan kontinu, yaitu untuk sebarang

$x = \{x_n\}, z = \{z_n\} \in L_1$ dan sebarang skalar $c \in \mathbb{R}$ berlaku

$$f_y(x+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + z_n) y_n = f_y(x) + f_y(z) \text{ dan}$$

$$f_y(cx) = \sum_{n=1}^{\infty} (cx_n) y_n = cf_y(x).$$

Selanjutnya untuk setiap $x = \{x_n\} \in L_1$ berlaku

$$|f_y(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

Jadi setiap $y = \{y_n\} \in L_\infty$ menentukan dengan tunggal fungsional linear kontinu f_y pada L_1 , atau $L_\infty \subset L_1^*$.

Sebaliknya, diambil sebarang fungsional linear kontinu f pada L_1 . Untuk setiap $x = \{x_n\} \in L_1$ dapat direpresentasikan oleh

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

dengan $e_n = \left\{ 0, \dots, \underset{\text{ke } n}{1}, 0, \dots, 0 \right\}$.

Karena f linear, maka diperoleh

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n).$$

Hal ini berarti bahwa $f(x)$ merupakan kombinasi linear dari barisan bilangan $\{f(e_n)\}$ atau fungsional linear kontinu f bergantung pada barisan bilangan $\{f(e_n)\}$.

Selanjutnya karena f kontinu, maka $|f(x)|$ terbatas, yaitu $|f(x)| < \infty$.

Menurut Ketaksamaan Cauchy-Schwartz, diperoleh

$$|f(x)| = \left| f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n (f(e_n)) \right| \leq \|x\|_{L_1} \sup_{n \geq 1} |f(e_n)|.$$

Supaya $f(x)$ terbatas, maka haruslah $\sup_{n \geq 1} |f(e_n)| < \infty$. Hal ini berarti bahwa $y = \{f(e_n)\} \in L_{\infty}$.

Jadi, setiap fungsional linear kontinu f pada L_1 menentukan dengan tunggal vektor $y = \{f(e_n)\} \in L_{\infty}$, yaitu $L_1^* \subset L_{\infty}$.

Jadi, karena $L_{\infty} \subset L_1^*$ dan $L_1^* \subset L_{\infty}$, maka $L_1^* = L_{\infty}$. $\square$

BAB 4

Partisi dan Jumlahan Riemann-Stieltjes

Pada teori integral dikenal dua proses pengintegralan, yaitu secara deskriptif dan secara konstruktif. Integral deskriptif didefinisikan sebagai anti-derivatif (anti turunan), konsekuensi dari type integral ini bahwa fungsi-fungsi yang mempunyai turunan dapat diintegrasikan. Contoh integral type deskriptif adalah integral Newton. Sedangkan integral konstruktif didefinisikan secara konstruktif, artinya dibangun berdasarkan partisi. Integral ini salah satunya dibangun berdasarkan partisi yang dikenal sebagai integral tipe Riemann. Seperti integral Riemann, integral McShane, integral Henstock dan lain sebagainya. Integral type Riemann ini dikonstruksi berdasarkan partisi, seperti partisi Riemann, partisi Lebesgue, atau partisi Perron δ -fine.

4.1 Partisi Perron δ -fine

Dalam bagian ini diberikan definisi dari partisi kemudian ditunjukkan eksistensi dari partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$.

Definisi 4.1.1 Diberikan $D_1, D_2, \dots, D_n$ interval yang tidak saling tumpang-tindih di dalam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dan $x_1, x_2, \dots, x_n$ di dalam $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Himpunan interval-titik $\mathcal{D} = \{(D, x)\} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ disebut partisi Lebesgue pada $[a, b] \subset \mathbb{R}$ jika $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n = [a, b]$.

- (i) Jika $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ partisi Lebesgue pada $[a, b]$ dan $x_i \in D_i$ untuk setiap i , maka $\mathcal{D}$ disebut partisi Perron pada $[a, b]$.

- (ii) Jika terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$, $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ partisi Lebesgue pada $[a, b]$ sehingga $D_i \subset B(x_i, \delta(x_i))$ untuk setiap i , di sebut partisi Lebesgue (McShane) δ -fine pada $[a, b]$.
- (iii) Jika $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ partisi Lebesgue δ -fine pada $[a, b]$ dan $x_i \in D_i$ untuk setiap i , maka $\mathcal{D}$ disebut partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$.

Berdasarkan Definisi 4.1.1, pada partisi Lebesgue $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$, x_i tak perlu anggota D_i untuk setiap i , sedangkan pada partisi Perron haruslah $x_i \in D_i$, $\forall i$. Hal ini berarti bahwa setiap partisi Perron merupakan partisi Lebesgue.

Dapat dikatakan juga bahwa koleksi pasangan interval -titik $\mathcal{D} = \{(D, x)\} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ disebut

- (i) Partisi Perron $\mathcal{E}$ -fine pada $[a, b]$ jika $D_i \subset B(x_i, \delta(x_i))$ dan $x_i \in D_i$, $\forall i (i = 1, 2, \dots, n)$ dengan $D_i^0 \cap D_j^0 = \emptyset, \forall i \neq j$ dan $\bigcup_{i=1}^n D_i = [a, b]$.

- (ii) Partisi Perron $\mathcal{E}$ -fine di dalam $[a, b]$ jika $D_i \subset B(x_i, \delta(x_i))$ dan $x_i \in D_i$, $\forall i (i = 1, 2, \dots, n)$ dengan $D_i^0 \cap D_j^0 = \emptyset, \forall i \neq j$ dan $\bigcup_{i=1}^n D_i \subset [a, b]$.

Selanjutnya, x_i dengan $(D_i, x_i) \in \mathcal{D}$ disebut titik terkait dari D_i (*associated point of D_i*) dan $(D_i, x_i) \in \mathcal{D}$ disebut selang δ -fine dengan titik terkait x_i .

Teorema berikut menyatakan eksistensi partisi Perron δ -fine pada $[a, b] \subset R$.

Teorema 4.1.2 Untuk setiap fungsi positif $\delta : [a, b] \rightarrow R$ terdapat partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$.

Bukti: Diberikan $[a, b] \subset R$ dan fungsi positif δ pada $[a, b]$.

Selanjutnya dibentuk $G = \{(\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)) \mid \xi \in [a, b]\}$ liput terbuka dari $[a, b]$. Karena $[a, b]$ tertutup dan terbatas maka $[a, b]$ kompak sehingga G mempunyai liput bagian hingga, katakan

$$\{(\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_k + \delta(\xi_k)) \mid k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Diambil $x_0 = a$ dan $x_n = b$

$$x \in (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i)) \cap (\xi_{i+1} - \delta(\xi_{i+1}), \xi_{i+1} + \delta(\xi_{i+1})), \xi_i \leq x_i \leq \xi_{i+1} \\ i = 1, 2, \dots, n-1$$

Dari sini diperoleh $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$ yang berarti bahwa $\mathcal{D} = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ partisi Perron δ -fine. $\square$

Teorema 4.1.3 Jika δ_1 dan δ_2 masing-masing fungsi positif pada $[a, b] \subset R$ dan $\delta_1(x) \leq \delta_2(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$ maka setiap partisi Perron δ_1 -fine pada $[a, b]$ merupakan partisi Perron δ_2 -fine pada $[a, b]$.

Teorema 4.1.4 Jika $\mathcal{D}_1 = \{(D, x)\}$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ dan $\mathcal{D}_2 = \{(D, x)\}$ partisi Perron δ -fine pada $[c, d]$ maka $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ partisi perron δ -fine pada $[a, b] \cup [c, d]$.

Bukti: Diberikan fungsi positif δ , $\mathcal{D}_1 = \{(D, x)\} = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i) | i=1, 2, \dots, n\}$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$, dan $\mathcal{D}_2 = \{([y_{k-1}, y_k], \xi_k) | k=1, 2, \dots, m\}$ partisi Perron δ -fine pada $[c, d]$. Karena δ fungsi positif pada interval $[a, b]$ dan $[c, d]$, akibatnya δ juga merupakan fungsi positif pada interval $[a, b] \cup [c, d]$.

Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \\ &= \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i) | i=1, 2, \dots, n\} \cup \{([y_{k-1}, y_k], \xi_k) | k=1, 2, \dots, m\} \end{aligned}$$

merupakan partisi Perron δ -fine pada $[a, b] \cup [c, d]$. $\square$

Lemma 4.1.5 (Lemma Cousin) Diberikan $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$. Jika $[c, d] \subseteq [a, b]$ maka terdapat partisi Perron δ -fine pada $[c, d]$ dengan c dan d sebagai salah satu titik ujungnya.

Bukti: Diberikan fungsi positif δ pada interval $[a, b]$. Selanjutnya dipilih

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \text{ dimana } [a, b] \subset \bigcup_i^n (\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_{k+1} + \delta(\xi_{k+1})) \text{ sedemikian}$$

sehingga dengan mengambil

$$c \in (\xi_r - \delta(\xi_r), \xi_r + \delta(\xi_r)) \cap (\xi_{r+1} - \delta(\xi_{r+1}), \xi_{r+1} + \delta(\xi_{r+1}))$$

dimana $\xi_r \leq c \leq \xi_{r+1}$ untuk $1 \leq r \leq n$ dan mengambil

$$d \in (\xi_s - \delta(\xi_s), \xi_s + \delta(\xi_s)) \cap (\xi_{s+1} - \delta(\xi_{s+1}), \xi_{s+1} + \delta(\xi_{s+1}))$$

dengan $\xi_s \leq d \leq \xi_{s+1}$ untuk suatu r, s dengan $1 < r < s < n$.

Diambil $x_0 = a$ dan $x_n = b$, $x_r = c$, dan $x_s = d$

$$x \in (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i)) \cap (\xi_{i+1} - \delta(\xi_{i+1}), \xi_{i+1} + \delta(\xi_{i+1})), \xi_i \leq x_i \leq \xi_{i+1}$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

Dari sini diperoleh partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$

$$\mathcal{D} = \{([x_0 = a, x_1], \xi_1), \dots, [x_{r-1}, x_r = c], \xi_r), ([x_r = c, x_{r+1}], \xi_{r+1}), \dots, \\ [x_{s-1}, x_s], \xi_s), ([x_s = d, x_{s+1}], \xi_{s+1}), \dots, [x_{n-1}, x_n = b])\}$$

di mana c dan d sebagai titik ujung. $\square$

4.2 Jumlahan Riemann-Stieltjes

Diberikan definisi dan sifat-sifat dari jumlahan Riemann-Stieltjes.

Definisi 4.2.1 Diberikan interval tertutup $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dan fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Untuk setiap $\mathcal{D} = \{(D, x)\} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ dibentuk jumlahan

$$\mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i)$$

dan disebut jumlahan Riemann-Stieltjes.

Notasi $\alpha(D) = \eta(D)$ dimaksudkan sebagai panjang interval D .

Teorema 4.2.2 Diberikan interval tertutup $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Jika $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ masing-masing fungsi pada $[a, b]$ dan $\mathcal{D} = \{(D, x)\} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$, serta sebarang skalar $u \in \mathbb{R}$ maka

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \sum_{i=1}^n (f+g)(x_i) \alpha(D_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i) + \sum_{i=1}^n g(x_i) \alpha(D_i). \\
 & (\mathfrak{D} \sum (f+g)(x) \alpha(D) = \mathfrak{D} \sum f(x) \alpha(D) + \mathfrak{D} \sum g(x) \alpha(D)). \\
 (ii) \quad & \sum_{i=1}^n (uf)(x_i) \alpha(D_i) = u \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i). \\
 & (\mathfrak{D} \sum (uf)(x) \alpha(D) = u(\mathfrak{D} \sum f(x) \alpha(D))).
 \end{aligned}$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (f+g)(x_i) \alpha(D_i) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) + g(x_i)) \alpha(D_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i) + g(x_i) \alpha(D_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i) + \sum_{i=1}^n g(x_i) \alpha(D_i) \\
 \sum_{i=1}^n (uf)(x_i) \alpha(D_i) &= \sum_{i=1}^n u f(x_i) \alpha(D_i) \\
 &= u \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i). \quad \square
 \end{aligned}$$

Teorema 4.2.3 Diberikan fungsi $f : [a, b] \rightarrow R$. Jika $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ maka berlaku

$$\mathfrak{D} \sum f(x) \alpha(D) = \mathfrak{D}_1 \sum f(x) \alpha(D) + \mathfrak{D}_2 \sum f(x) \alpha(D). \quad \square$$

BAB 5**Integral Lebesgue, McShane, dan Henstock**

Pada bab ini, dibicarakan integral Lebesgue, McShane, dan integral Henstock fungsi bernilai real yang lebih luas dari pada integral Riemann. Integral Lebesgue didefinisikan berdasarkan ukuran, sedangkan integral McShane dan Henstock didefinisikan berdasarkan partisi. Sebelum membicarakan integral Lebesgue, McShane, dan integral Henstock, dibahas terlebih dahulu tentang fungsi terukur.

5.1 Fungsi Terukur

Berikut ini dijelaskan definisi fungsi terukur beserta teorema-teorema yang terkait.

Definisi 5.1.1 Fungsi $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan terukur jika E himpunan terukur dan untuk setiap bilangan riil α maka himpunan $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ terukur.

Seperti yang dinyatakan dalam definisi, bahwa domain dari fungsi terukur haruslah himpunan terukur. Sebenarnya, kita akan selalu mengasumsikan bahwa domain dari suatu fungsi baik fungsi itu terukur atau tidak terukur adalah himpunan terukur yang meskipun secara eksplisit tidak disebutkan.

Berdasarkan definisi fungsi terukur, jelas bahwa fungsi kontinu dan fungsi monoton merupakan fungsi terukur.

Contoh 5.1.2 Fungsi konstan adalah terukur.

Bukti: Bergantung pada pemilihan α (karena f konstan), maka himpunan

$$\{x \in R : f(x) > \alpha\} = R \text{ atau } \emptyset.$$

Maka himpunan $\{x \in R : f(x) > \alpha\} = R$ atau $\emptyset$ terukur.

Jadi, fungsi konstan adalah fungsi terukur. $\square$

Teorema 5.1.3 Diberikan E himpunan terukur dan fungsi $f : E \rightarrow R$. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

- (i) Untuk setiap bilangan Riel α , himpunan $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ terukur.
- (ii) Untuk setiap bilangan Riel α , himpunan $\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ terukur.
- (iii) Untuk setiap bilangan Riel α , himpunan $\{x \in E : f(x) < \alpha\}$ terukur.
- (iv) Untuk setiap bilangan Riel α , himpunan $\{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ terukur.

Bukti: Diberikan f terukur, maka

$$\{x \in E : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ x \in E : f(x) > \alpha - \frac{1}{n} \right\} \right) \quad \text{untuk setiap}$$

bilangan asli n adalah terukur.

Sehingga (i) $\Rightarrow$ (ii).

Karena $\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ terukur, maka komplementennya yaitu $\{x \in E : f(x) < \alpha\}$ juga terukur.

Sehingga (ii) $\Rightarrow$ (iii).

$$\{x \in E : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ x \in E : f(x) < \alpha + \frac{1}{n} \right\} \right) \quad \text{adalah terukur}$$

untuk setiap bilangan asli n .

Sehingga (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Selanjutnya karena $\{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ terukur, maka komplementennya yaitu $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ juga terukur.

Sehingga (iv) $\Rightarrow$ (i). Bukti selesai. $\square$

Teorema 5.1.4 Misalkan c bilangan real, dan fungsi $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dan $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ masing-masing fungsi terukur pada himpunan terukur E , maka $f + c$, cf , $f + g$, $f - g$ dan fg juga terukur pada E .

Bukti: Diketahui f dan g fungsi terukur pada E dan bilangan real c .

Untuk sebarang bilangan real α , maka

$\{x \in E : f(x) + c > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha - c\}$ adalah himpunan terukur.

Jadi $f + c$ terukur.

Jika $c = 0$ maka cf juga terukur.

Jika $c > 0$ maka $\{x \in E : cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in E : f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\}$ adalah himpunan terukur.

Untuk $c < 0$ maka $\{x \in E : cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in E : f(x) < \frac{\alpha}{c}\right\}$ adalah himpunan terukur.

Jadi, cf adalah terukur.

Jika $f(x) + g(x) > \alpha$, maka terdapat bilangan rasional $q \in \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $\alpha - g(x) < q < f(x)$, maka

$$\{x \in E : (f + g)(x) > \alpha\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{x \in E : f(x) > q\} \cap \{x \in E : g(x) > \alpha - q\})$$

adalah himpunan terukur.

Jadi $f+g$ juga terukur.

Dengan demikian $f-g=f+(-g)$ juga terukur.

Selanjutnya,

$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$, sebelumnya dibuktikan bahwa f^2 fungsi terukur.

Jika $\alpha < 0$, maka $\{x \in E : f^2(x) > \alpha\} = \mathfrak{R}$ terukur.

Jika $\alpha \geq 0$, maka $\{x \in E : f^2(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cap \{x \in E : f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$ adalah himpunan terukur.

Jadi f^2 adalah fungsi terukur.

Dengan demikian, fg juga fungsi terukur.

Bukti selesai. $\square$

Definisi 5.1.5 Fungsi f mempunyai sifat P (sifat secara umum) hampir dimana-mana (almost everywhere) pada $A \subset \mathbb{R}$ jika $E = \{x \in A \mid f(x) \text{ tidak mempunyai sifat } P\}$ maka $\mu(E) = 0$.

Definisi 5.1.6 Fungsi f mempunyai sifat P nyaris dimana-mana (nearly everywhere) pada $A \subset \mathbb{R}$ jika himpunan $\{x \in A \mid f(x) \text{ tidak mempunyai sifat } P\}$ terhitung (countable).

Teorema 5.1.7 Diberikan fungsi $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ terukur dan fungsi $g : E \rightarrow \mathbb{R}$. Jika $f = g$ almost everywhere pada E , maka g fungsi terukur.

Bukti: Diketahui bahwa $f = g$ almost everywhere pada E , hal ini berarti himpunan $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ adalah berukuran nol (*measure zero*).

Untuk setiap bilangan Riel α , misalkan $A = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ dan

$$B = \{x \in E : g(x) > \alpha\}, \text{ maka}$$

$$A-B = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \text{ dan}$$

$$B-A = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}.$$

Karena A himpunan terukur dan $A-B, B-A$ *measure zero* yang berarti terukur, maka

$$B = (B-A) \cup (B \cap A) = (B-A) \cup (A - (A-B)) \text{ terukur.}$$

Dengan demikian, g fungsi terukur. $\square$

Teorema 5.1.8 Diberikan Himpunan terukur E jika fungsi $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu almost everywhere pada E , maka f fungsi terukur.

Bukti: Misalkan $D = \{x \in E \mid f(x) \text{ diskontinu}\}$, $D \subseteq E$ dan $\mu(D) = 0$ (D *measure zero*), sehingga D terukur.

Untuk setiap bilangan Riel α , dan

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = \{x \in E - D : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in D : f(x) > \alpha\}$$

Akan ditunjukkan $C = \{x \in E - D : f(x) > \alpha\}$ terukur.

Karena f kontinu pada setiap titik di C , maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk $x \in C$ dimana $|x - t| < \delta$, maka berlaku

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon$$

Jika $f(x) > \alpha$, maka

$$\alpha - \varepsilon < f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$$

Sehingga $\alpha - \varepsilon < f(t)$

Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $f(t) \geq \alpha$, dimana $t \in \{y \in E : |y - x| < \delta\}$.

Dibentuk $U = \bigcup_{x \in C} (\{y : |y - x| < \delta\})$

Maka U adalah himpunan terukur (sebab U himpunan terbuka).

Dengan demikian $C = U \cap (E - D)$ terukur.

Karena gabungan dua himpunan terukur adalah terukur, jadi $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ terukur atau f terukur pada E . $\square$

Teorema 5.1.9 (Teorema Tiezte Extension) Diberikan himpunan tertutup E . Jika fungsi $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu pada E , maka terdapat fungsi kontinu $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sedemikian sehingga $f = g$ pada E .

Bukti: Asumsikan E tidak terbatas.

Jika tidak, misalkan $f(x) = f(\sup E)$ untuk setiap $x > \sup E$ dan $f(x) = f(\inf E)$ untuk setiap $x < \inf E$.

Dibentuk $\{(a_n, b_n)\}$ barisan yang saling asing pada interval buka $\mathbb{R} - E$.

Misalkan $g(x) = f(x)$ untuk $x \in E$ dan

$$g(x) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{(b_n - a_n)}(x - a_n) + f(a_n) \text{ untuk } x \in (a_n, b_n).$$

Hal ini berarti fungsi g linier pada $\mathbb{R} - E$.

Akan dibuktikan fungsi $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu.

Jelas bahwa g kontinu pada setiap titik di $R-E$ dan pada setiap titik terasing pada E .

Akan dibuktikan bahwa g kontinu pada setiap titik limit E .

Misalkan c adalah titik limit E , ada beberapa kasus:

1. Jika c adalah titik terasing dari E pada salah satu sisi, maka f kontinu pada sisi c .

2. Jika c titik limit kanan dari E dan diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$.

Karena f kontinu pada E , maka terdapat titik $c_1 \in E \cap (c, \infty)$ sedemikian sehingga $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ dengan $x \in [c, c_1] \cap E$.

Misalkan $x \in [c, c_1] - E$ dan pilih k sedemikian sehingga $x \in (a_k, b_k)$.

Karena g linier pada (a_k, b_k) , maka

$$\begin{aligned} |g(x) - g(c)| &< \max\{|g(a_k) - g(c)|, |g(b_k) - g(c)|\} \\ &= \max\{|f(a_k) - f(c)|, |f(b_k) - f(c)|\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dengan demikian g kontinu pada c . $\square$

Teorema 5.1.10 (Lusin's Theorem) *Jika fungsi $f: R \rightarrow R$ terukur, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat himpunan tertutup E dan fungsi kontinu $g: R \rightarrow R$ sedemikian sehingga $\mu(R-E) < \varepsilon$ dan $f = g$ pada E .*

Bukti: Misalkan $\{I_n\}$ adalah barisan dari semua interval buka yang dibentuk oleh $(p, p+1)$ dengan p adalah bilangan bulat dan diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Untuk setiap n terdapat himpunan tertutup $K_n \subseteq I_n$ sedemikian hingga $f|_{K_n}$ kontinu pada K_n dan

$$\mu(I_n - K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Misal $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ dengan E adalah himpunan tertutup.

$$\mu(R - E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n - K_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

dan fungsi $f|_E$ (fungsi f hanya dibatasi pada E) kontinu pada E .

Oleh Teorema Tietze Extension, maka terdapat fungsi kontinu $g : R \rightarrow R$ sedemikian sehingga $f = g$ pada E . $\square$

Definisi 5.1.11 Fungsi $\phi : [a, b] \rightarrow R$ dikatakan fungsi tangga (step function) jika terdapat koleksi berhingga interval buka $\{I_k : k = 1, 2, 3, \dots, n\}$ yang saling asing di (a, b) sedemikian hingga

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \text{ dan } \phi \text{ adalah konstan pada setiap } I_k.$$

Akibat 5.1.12 Fungsi tangga merupakan fungsi terukur.

Teorema 5.1.13 Fungsi f terukur pada $[a, b]$ jika dan hanya jika terdapat barisan fungsi tangga $\{f_n\}$ pada $[a, b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen ke f hampir dimana-mana pada $[a, b]$.

Bukti: $(\Rightarrow)$ Misalkan f terukur pada $[a, b]$ yaitu himpunan $X = \{x \in [a, b] : f(x) > \alpha\}$ terukur untuk setiap bilangan real α .

Tetapkan $n \in N$, dibentuk:

$$X_{n_i} = \{x \in [a, b] \mid (i-1)2^{-n} \leq f(x) < i2^{-n}\} \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n2^n$$

$$X_n = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq n\}$$

Himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan terukur yang saling asing satu sama lain, sebab X himpunan terukur.

Dibentuk fungsi:

$$f_n(x) = \begin{cases} (i-1)2^{-n}, & x \in X_{n_i}, i=1,2,\dots,n2^n \\ n & , x \in X_n \end{cases}$$

Dari sini diperoleh bahwa f_n konvergen ke f titik demi titik pada $[a,b]$.

Misalkan $A = \{x \in [a,b] \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)$ berarti bahwa terdapat $\varepsilon > 0$ dan $x \in [a,b]$ untuk

setiap $N_{(\varepsilon,x)} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N_{(\varepsilon,x)}$, maka berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon = 2^{-n}.$$

Hal ini kemungkinan hanya terjadi pada titik-titik

$$\{(i-1)2^{-n}, i2^{-n}\} \text{ untuk } i=1,2,\dots,n2^n \text{ dan } n=1,2,\dots$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} A &= \{x \in [a,b] \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\} \\ &= \{(i-1)2^{-n}, i2^{-n} \mid n=1,2,3,\dots \text{ dan } i=1,2,\dots,n2^n\}. \end{aligned}$$

Karena A himpunan *countable* maka $\mu(A) = 0$.

($\Leftarrow$) Misalkan terdapat barisan fungsi tangga $\{f_n\}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen ke f hamper dimana-mana pada $[a,b]$, yaitu terdapat himpunan A dengan $\mu(A) = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)$ untuk setiap $x \in A$.

Dibentuk:

$$X(f > \alpha) = \{x \in [a, b] \mid f(x) > \alpha\} \text{ dan}$$

$$\begin{aligned} Y &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \left(\left\{ f_i \geq \alpha + \frac{1}{k} \right\} \right) \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \left(\left\{ x \in [a, b] \mid f_i(x) \geq \alpha + \frac{1}{k} \right\} \right) \end{aligned}$$

Hal ini berarti $x \in Y$ maka untuk setiap k terdapat n sehingga untuk setiap $i \geq n$, maka $f_i(x) \geq \alpha + \frac{1}{k}$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap $x \in [a, b]$ terdapat $N_{(\varepsilon, x)} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m \geq N_{(\varepsilon, x)}$, maka berlaku

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

$$\text{atau } f_m(x) - \varepsilon < f(x) < f_m(x) + \varepsilon$$

Jika diambil $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $N_{(\varepsilon, x)} = n$ dan $m = i \geq n$, maka berlaku

$$\alpha + \frac{1}{k} < f_i(x) - \frac{1}{k} < f(x) \text{ untuk setiap } k = 1, 2, \dots$$

Untuk k mendekati ∞ maka $\alpha \leq f_i(x) < f(x)$

Sehingga $f(x) > \alpha$ untuk setiap $x \in X$.

Sebaliknya jika $x \in X$ yaitu $f(x) > \alpha$, akibatnya $\alpha < f(x) < f_i(x) + \frac{1}{k}$

untuk $k = 1, 2, \dots$

Untuk k mendekati ∞ maka $\alpha < f(x) < f_i(x)$

Sehingga $\alpha < f_i(x)$ untuk setiap $x \in Y$.

$$\text{Jadi, } X(f > \alpha) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} X\left(f_i \geq \alpha + \frac{1}{k}\right) = Y$$

Karena $X\left(f_i \geq \alpha + \frac{1}{k}\right)$ himpunan terukur untuk setiap bilangan Riel α , akibatnya Y juga terukur, dan

$$X(f > \alpha) - A = Y - A,$$

karena Y terukur dan $\mu(A) = 0$, maka $X(f > \alpha)$ juga terukur.

Jadi, fungsi f terukur. $\square$

5.2 Integral Lebesgue

Integral Lebesgue didefinisikan berdasarkan fungsi sederhana dan himpunan terukur. Fungsi $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan fungsi tangga jika ada koleksi berhingga $\{I_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ yang saling asing dalam interval buka (a, b) sedemikian sehingga $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n I_k$ dan ϕ konstan untuk setiap I_k .

Definisi 5.2.1 Misalkan $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi tangga dan $\phi = \sum_{k=1}^n c_k \alpha(I_k)$.

Integral Riemann atas ϕ pada $[a, b]$ didefinisikan oleh

$$\int_a^b \phi = \sum_{k=1}^n c_k \alpha(I_k).$$

Definisi 5.2.2 Misalkan fungsi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terbatas. Upper dan lower integral Riemann fungsi f pada $[a, b]$ didefinisikan oleh

$$\int_a^b f = \inf \left\{ \int_a^b \psi \mid \psi \geq f \text{ fungsi tangga} \right\}$$

$$\int_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b \phi \mid \phi \leq f \text{ fungsi tangga} \right\}.$$

Jike kedua nilai tersebut sama, maka dikatakan bahwa f terintegral Riemann pada $[a, b]$.

Definisi 5.2.3 Misalkan $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi sederhana dan $s = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$ bentuk representasi kanonik dari s . Integral Lebesgue atas s pada $[a, b]$ didefinisikan oleh

$$\int_a^b s = \sum_{k=1}^n c_k \mu(E_k).$$

Jika $A \subset [a, b]$ himpunan terukur, maka

$$\int_A s = \int_a^b s \chi_A = \sum_{k=1}^n c_k \mu(E_k \cap A).$$

Teorema 5.2.4 Misalkan s dan r fungsi sederhana pada $[a, b]$ dan $A, B \subset [a, b]$ dua himpunan terukur, maka berlaku

$$(1) \int_a^b cs = c \int_a^b s \text{ untuk sebarang skalar } c.$$

$$(2) \int_a^b s + r = \int_a^b s + \int_a^b r.$$

$$(3) \text{ Jika } r \leq s \text{ a.e pada } [a, b] \text{ maka } \int_a^b r \leq \int_a^b s.$$

$$(4) \text{ Jika } r = s \text{ a.e pada } [a, b] \text{ maka } \int_a^b r = \int_a^b s.$$

$$(5) \left| \int_a^b r \right| \leq \int_a^b |s|.$$

$$(6) \text{ Jika } A \cap B = \emptyset, \text{ maka } \int_{A \cup B} s = \int_A s + \int_B s.$$

$$(7) \text{ Jika } s \geq 0 \text{ dan } A \subseteq B, \text{ maka } \int_A s \leq \int_B s.$$

Definisi 5.2.5 Misalkan fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terbatas. Upper dan lower integral Lebesgue fungsi f pada $[a, b]$ didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \inf \left\{ \int_a^b s \mid s \geq f \text{ fungsi sederhana} \right\} \\ \int_a^b f &= \sup \left\{ \int_a^b r \mid r \leq f \text{ fungsi sederhana} \right\}. \end{aligned}$$

Jike kedua nilai tersebut sama, maka dikatakan bahwa f terintegral Lebesgue pada $[a, b]$.

Fungsi f terintegral Lebesgue pada himpunan terukur $A \subset [a, b]$ jika fungsi $f \chi_A$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan

$$\int_A f = \int_a^b f \chi_A.$$

Teorema 5.2.6 Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi terbatas. Fungsi f terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ jika dan hanya jika f fungsi terukur.

Teorema 5.2.7 Misalkan f dan g terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan $A, B \subset [a, b]$ dua himpunan terukur, maka berlaku

(1) cf terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan $\int_a^b cf = c \int_a^b f$ untuk sebarang

skalar c .

(2) $f + g$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(3) Jika $f \leq g$ a.e pada $[a, b]$ maka $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(4) Jika $f = g$ a.e pada $[a, b]$ maka $\int_a^b f = \int_a^b g$.

(5) $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

(6) Jika $A \cap B = \emptyset$, maka $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

(7) Jika $f \geq 0$ dan $A \subseteq B$, maka $\int_A f \leq \int_B f$.

5.3 Integral McShane

Integral McShane merupakan integral tipe Riemann yang dikonstruksi berdasarkan partisi. Pada bagian ini akan diperlihatkan bahwa integral McShane ekuivalen dengan integral Lebesgue.

Definisi 5.3.1 Diberikan fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan terintegral McShane pada $[a, b]$ jika terdapat bilangan real L , sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapatlah fungsi δ positif sedemikian sehingga untuk setiap partisi tag bebas yang subordinate ke δ (partisi

Lebesgue/McShane) pada $[a, b]$ yaitu $D = \{(\xi_i, [x_{i-1}, x_i]) : i = 1, 2, 3, \dots, n\}$,

memenuhi :

$$|f(D) - L| < \varepsilon$$

dimana $f(D) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ adalah jumlahan Riemann atas partisi

D .

Teorema 5.3.2 Diberikan fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Jika fungsi f kontinu pada

$[a, b]$ maka f terintegral McShane pada $[a, b]$ dan $\int_a^b f = (R) \int_a^b f$.

Bukti: Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$ karena f terintegral Riemann pada $[a, b]$ terdapatlah sebuah fungsi konstan positif δ_1 pada $[a, b]$

sedemikian sehingga $\left| f(P) - (R) \int_a^b f \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ dimana P adalah partisi tag

bebas yang subordinate δ_1 pada $[a, b]$.

Karena f kontinu seragam pada $[a, b]$ terdapatlah $\eta > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ dimana } x, y \in [a, b] \text{ dan } |y - x| < \eta.$$

Diberikan $\delta(x) = \min \left\{ \eta, \frac{\delta_1(x)}{2} \right\}$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Andaikan

$D = \{(x_i, [c_i, d_i]) | 1 \leq i \leq q\}$ adalah partisi tag bebas yang subordinate δ pada $[a, b]$.

Diberikan $P = \{(y_i, [c_i, d_i]) | 1 \leq i \leq p\}$ dan P partisi tag bebas yang subordinate δ_1 pada $[a, b]$. sehingga :

$$\begin{aligned}
 \left| f(D) - (R) \int_a^b f \right| &\leq |f(D) - f(P)| + \left| f(P) - (R) \int_a^b f \right| \\
 &< \sum_{i=1}^q |f(x_i) - f(y_i)|(d_i - c_i) + \varepsilon \\
 &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

Karena ε bernilai sembarang, maka fungsi f terintegral McShane pada

$$[a, b] \text{ dan } \int_a^b f = (R) \int_a^b f. \quad \square$$

Definisi 5.3.3 (Fungsi Primitif) Didefinisikan fungsi $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan rumus:

$$F(a) = 0 \text{ dan } F(x) = (M) \int_a^x f(t) dt \text{ untuk setiap } x \in [a, b]$$

fungsi F ini disebut fungsi primitif f pada $[a, b]$.

Berdasarkan fungsi primitif ini untuk $f \in M([a, b]);$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \text{ diperoleh } F(a, b) = F(b) - F(a) = (M) \int_a^b f(t) dt.$$

Seperti hasil di atas maka untuk $f \in M([x_{i-1}, x_i])$ dengan $i=1, 2, \dots, n$ berlaku

$$F(x_{i-1}, x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt$$

Karena $\bigcup [x_{i-1}, x_i] = [a, b]$, dengan kata lain

$$F(a,b) = (M) \int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt = \sum_{i=1}^n F(x_{i-1}, x_i).$$

Teorema 5.3.4 *Jika f terintegral McShane pada $[a,b]$ dengan fungsi primitif F maka F differensiabel hampir dimana-mana pada $[a,b]$ dan $F'(x) = f(x)$.*

Bukti: Akan dibuktikan bahwa $F'(x) = f(x)$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$. Fungsi f terintegral McShane pada $[a,b]$ dengan fungsi primitif F . Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapatlah fungsi positif $\delta(\xi)$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga untuk setiap partisi tag bebas subordinate δ pada $[a,b]$ yaitu $D = \{(\xi_i, [x_{i-1}, x_i]) \mid 1 \leq i \leq n\}$ berlaku :

$$D \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - F(x_{i-1}, x_i)| < \varepsilon$$

Dibentuk himpunan $X = \{x \in [a,b]; F(x) \text{ tidak ada atau bila ada } F'(x) \neq f(x)\}$ Akan ditunjukkan $\mu(X) = 0$. Diambil $x \in X$ sehingga terdapatlah $\eta(x) > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\delta > 0$ ada x'_{k-1} dengan $0 < x - x'_{k-1} < \delta$, berlaku:

$$|F(x) - F(x'_{k-1}) - f(x)(x - x'_{k-1})| \geq \eta(x)|x - x'_{k-1}|$$

atau ada x'_k dengan $0 < x'_k - x < \delta$ dan berlaku

$$|F(x'_k) - F(x) - f(x)(x'_k - x)| \geq \eta(x)|x'_k - x|.$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dibentuk himpunan $X_n = \{x \in X \mid \eta(x) \geq \frac{1}{n}\}$ sehingga,

$$X = \bigcup_n X_n.$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $[x'_{k-1}, x'_k]$, $k=1,2,\dots,p$ dengan $x'_{k-1}=x_k$ dan $x'_k=x_{k+1}$ sehingga,

$$X_n \subset \bigcup_{k=1}^p [x'_{k-1}, x'_k] \quad \text{dan} \quad \mu(X_n) < \sum_{k=1}^p (x'_k - x'_{k-1}) + \varepsilon$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mu(X_n) &< \sum_{k=1}^p (x'_k - x'_{k-1}) + \varepsilon \\ &< \sum_{k=1}^p \frac{1}{\eta(x_k)} |F(x'_k) - F(x'_{k-1}) - F(x_k)(x'_k - x'_{k-1})| + \varepsilon \\ &< n\varepsilon + \varepsilon = (n+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Karena nilai ε sebarang, hal ini menunjukkan $\mu(X_n)=0$ dan karena $X = \bigcup_n X_n$ maka $\mu(X)=0$.

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa jika f terintegral McShane pada $[a,b]$ dengan fungsi primitif $F(x)$ ada dan jika tidak ada atau $F'(x) \neq f(x)$ nilai ukurannya nol maka $F'(x)=f(x)$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$. $\square$

Teorema 5.3.5 *Jika f terintegral McShane pada $[a,b]$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi tangga ϕ sehingga*

$$\int_a^b |f - \phi| < \varepsilon.$$

Bukti: Misalkan f terbatas pada $[a,b]$.

Didefinisikan barisan F_n pada fungsi primitif F oleh

$$F_n(x) = F(x)$$

dengan $x = a + i(b-a)2^{-n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n$ dan linier untuk x yang lain di $[a, b]$.

Misalkan $f_n(x) = F'_n(x)$ hampir dimana-mana. Hal ini karena F_n kontinu (menurut akibat 2.35) dan linier sepotong-potong.

Dengan demikian f_n adalah fungsi tangga yang nilainya terbentuk dari

$$\frac{F(y) - F(x)}{(y - x)}.$$

Karena menurut Teorema 5.3.4 F differensiabel hampir dimana-mana, maka barisan fungsi tangga $f_n(x)$ konvergen ke $f(x)$ hampir dimana-mana.

Dengan demikian, $\int_a^b |f_n - f|$ mendekati nol (0) untuk n mendekati ∞

Atau jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $n \geq N$ sedemikian sehingga

$$\int_a^b |f_n - f| < \varepsilon$$

Sehingga

$$\int_a^b |f_n - f| = \int_a^b |f - \phi| < \varepsilon. \quad \square$$

Teorema 5.3.6 *Jika f terintegral McShane pada $[a, b]$ maka, terdapat barisan fungsi tangga $\{f_n\}$ pada $[a, b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen ke f hampir dimana-mana pada $[a, b]$.*

Bukti: Diberikan F fungsi primitif dari f .

Karena f terintegral McShane pada $[a, b]$ dengan fungsi primitif F maka menurut Teorema 5.3.4, $F'(x) = f(x)$ hampir dimana-mana pada $[a, b]$.

Didefinisikan F_n seperti dalam bukti Teorema 5.3.5.

Selanjutnya $f_n(x) = F_n'(x)$ hamper dimana-mana pada $[a,b]$. Karena $f_n(x) = F_n'(x)$ hamper dimana-mana pada $[a,b]$ maka, barisan fungsi tangga $\{f_n\}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen ke f hamper dimana-mana pada $[a,b]$.

Terbukti bahwa jika f terintegral McShane pada $[a,b]$, maka terdapat barisan fungsi tangga $\{f_n\}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen ke f hampir dimana-mana pada $[a,b]$. $\square$

Teorema 5.3.7 *Jika fungsi f terintegral McShane pada $[a,b]$ maka f terbatas.*

Bukti: Diberikan $f \in M([a,b])$ dengan $\int f(x)dx = A$.

Ambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapatlah fungsi positif $\delta(\xi)$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga untuk setiap partisi tag bebas subordinate δ pada $[a,b]$ yaitu $D_N = \{(\xi_i, [x_{i-1}, x_i]) \mid 1 \leq i \leq N\}$ berlaku :

$$\left| D_N \sum_i^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \varepsilon$$

sehingga untuk setiap partisi tag bebas yang subordinate δ pada $[a,b]$ yaitu $D_n = \{(\xi_i, [x_{i-1}, x_i]) \mid 1 \leq i \leq n\}$ yang merupakan penghalusan dari partisi D_N yang berarti $n \geq N$, berlaku :

$$\left| D_n \sum_i^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \varepsilon$$

Dari sini tampak bahwa barisan jumlahan Riemann $D_n =$

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ konvergen. Karena konvergen berarti masing-masing

suku barisan tersebut terbatas, yaitu terdapatlah $M > 0$ sehingga,

$$|f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| < M$$

untuk setiap $i=1,2,\dots,n$.

$$|f(\xi_i)| < \frac{M}{|x_i - x_{i-1}|} \leq M_0$$

dengan $M_0 = \max \left\{ \frac{M}{|x_i - x_{i-1}|} \mid i=1, 2, \dots, n \right\}$ karena D sembarang partisi tag

bebas yang subordinate δ pada $[a,b]$ maka untuk setiap $x \in [a,b]$ bisa menjadi tag pada D , sehingga untuk setiap $x \in [a,b]$ berlaku:

$$|f(x)| < M_0$$

sehingga f terbatas.

Terbukti bahwa jika f terintegral McShane pada $[a,b]$ maka f terbatas. $\square$

Teorema 5.3.8 *Jika fungsi f terintegral McShane pada $[a,b]$ maka f terukur pada $[a,b]$.*

Bukti: Menurut Teorema 5.3.6 bahwa Jika f terintegral McShane pada $[a,b]$ maka, terdapat barisan fungsi tangga $\{f_n\}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen ke f hamper dimana-mana pada $[a,b]$, dan menurut Teorema 5.1.13 barisan fungsi tangga $\{f_n\}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen ke f hamper dimana-mana pada $[a,b]$ maka f terukur pada $[a,b]$.

Jadi terbukti bahwa jika f terintegral McShane pada $[a,b]$, maka f terukur pada $[a,b]$. $\square$

Teorema 5.3.7 dan Teorema 5.3.8 menjelaskan bahwa jika fungsi f tidak terbatas dan tidak terukur maka f tidak terintegral McShane.

Teorema 5.3.9 Diberikan fungsi $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Jika fungsi f terbatas dan terukur pada $[a,b]$, maka f terintegral McShane pada $[a,b]$.

Bukti: Misalkan M adalah batas fungsi f pada $[a,b]$ dan diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$. maka menurut Teorema Lusin's, terdapat himpunan terukur $A \subseteq [a,b]$ dan fungsi kontinu $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian hingga $f = g$ pada A dan $\mu(B) = \frac{\varepsilon}{8M}$ dengan $B = [a,b] - A$, dan g terbatas oleh M .

Karena g kontinu pada $[a,b]$, maka menurut Teorema 5.3.2 g terintegral McShane pada $[a,b]$, yaitu terdapat fungsi positif δ_1 pada $[a,b]$ sedemikian hingga untuk setiap partisi tag bebas yang subordinate ke δ_1 pada $[a,b]$, yaitu $D_n = \{(\xi_i, [x_{i-1}, x_i]) \mid 1 \leq i \leq n\}$, berlaku

$$\left| g(D) - \int_a^b g \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dengan $g(D) = \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ adalah jumlahan Riemann atas partisi D .

Misalkan O himpunan terbuka sedemikian hingga $B \subseteq O$ dan $\mu(O) = \frac{\varepsilon}{8M}$ dan didefinisikan δ pada $[a,b]$ oleh :

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_1(x) & , \quad x \in A \\ \min\{\delta_1(x), \rho(x, O^c)\}, & x \in B \end{cases}$$

Dimana $(\rho(x, O^c) = \inf\{|y - x| : y \in O^c\})$ yaitu jarak antara x ke O^c .

Dengan demikian, D juga partisi *tag*-bebas yang sub-ordinat ke δ pada $[a, b]$, maka berlaku

$$\begin{aligned} \left| f(D) - \int_a^b f \right| &\leq |f(D) - g(P)| + \left| g(D) - \int_a^b g \right| + \int_a^b (g - f) \\ &\leq 2M\mu(O) + \varepsilon + 2M\mu(B) \\ &< 2M\left(\frac{\varepsilon}{8M}\right) + \frac{\varepsilon}{2} + 2M\left(\frac{\varepsilon}{8M}\right) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti, f terintegral McShane pada $[a, b]$. $\square$

Berdasar Teorema 5.3.7, Teorema 5.3.8, dan Teorema 5.3.9, diperoleh teorema sebagai berikut.

Teorema 5.3.10 *Fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral McShane pada $[a, b]$ jika dan hanya jika f terbatas dan terukur pada $[a, b]$.*

Bukti: Sesuai Teorema 5.3.7, Teorema 5.3.8, dan Teorema 5.3.9. $\square$

Contoh 5.3.11 Misalkan E adalah himpunan tidak terukur dan $E \subseteq [0, 1]$. Didefinisikan fungsi $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ oleh

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in E \\ 0, & x \in [0, 1] - E \end{cases}$$

maka f tidak terintegral McShane pada $[0, 1]$.

Bukti: Akan dibuktikan bahwa f terbatas pada $[0, 1]$, tetapi tidak terukur.

Untuk setiap $x \in [0,1]$ terdapat bilangan Riel $M > 0$, sedemikian sehingga $|f(x)| \leq M$.

Pilih $M = \max \{0,1\}$.

Jadi untuk setiap $x \in [0,1]$ maka $|f(x)| \leq 1$.

Dengan demikian f terbatas pada $[0,1]$.

Fungsi f tidak terukur pada $[0,1]$, yaitu untuk setiap bilangan Riel $\alpha > 0$ maka himpunan $\{x \in [0,1] : f(x) > \alpha\}$ tidak terukur, karena $\{x \in [0,1] : f(x) > \alpha\} \subseteq E$.

Jadi, f tidak terukur.

Karena f tidak terukur pada $[0,1]$ maka menurut Teorema 5.3.9, f tidak terintegral McShane pada $[0,1]$.

Teorema 5.3.12 *Jika $f(x) = 0$ hampir dimana-mana untuk setiap x pada $[a,b]$, maka f terintegral McShane pada $[a,b]$ dan $(M) \int_a^b f(x)dx = 0$.*

Bukti: Misalkan $f(x) = 0$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$. Ambil

$$N = \{x \in [a,b] \mid f(x) \neq 0\}.$$

Karena $f(x) = 0$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$ maka $\mu(N) = 0$. Karena itu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dibentuk $N_n = \{x \in N \mid n-1 < |f(x)| \leq n\}$ sehingga

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \text{ dan } N_n \subset N \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N} \text{ maka berlaku}$$

$$0 \leq \mu(N_n) \leq \mu(N) = 0.$$

Jadi, $\mu(N_n) = 0$ untuk setiap n .

Oleh karena itu terdapatlah interval terbuka G_n , $N_n \subset G_n$ dan

$$\mu(G_n) = \frac{\varepsilon}{n2^{n+1}}.$$

Misalkan ambil fungsi positif $\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] - N \\ \frac{\varepsilon}{n2^{n+1}}, & x \in N \end{cases}.$

Hal ini berarti $\delta(x) = 1$ jika $x \in [a, b] - N$. Jika $x \in N$, maka terdapat n sehingga $x \in N_n \subseteq G_n$. Karena itu untuk sembarang partisi *tag* bebas yang subordinate δ pada $[a, b]$ yaitu $D = \{(\xi_i, [x_{i-1}, x_i]) \mid 1 \leq i \leq p\}$ berlaku,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^p f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| &\leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1, \xi_i \in N_n} n |x_i - x_{i-1}| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\xi_i \in N_n} |x_i - x_{i-1}| \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\varepsilon}{n2^{n+1}} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti f terintegral McShane pada $[a, b]$ dan (M) $\int_a^b f(x) dx = 0$. $\square$

Teorema 5.3.13 (Kriteria Cauchy) Fungsi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral McShane pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapatlah fungsi positif δ dalam $[a, b]$ sedemikian sehingga $|f(D_1) - f(D_2)| < \varepsilon$ dimana D_1 dan D_2 adalah partisi *tag* bebas yang subordinate ke δ pada $[a, b]$. $\square$

Theorema 5.3.14 (Saks-Henstock Lemma) Jika f terintegral McShane pada $[a,b]$ dengan fungsi primitif F , maka untuk setiap bilangan positif $\varepsilon > 0$, terdapatlah fungsi $\delta(\xi) > 0$ pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap partisi tag bebas yang subordinate ke δ pada $[a,b]$ yaitu $D = \{(\xi_i, [x_{i-1}, x_i]) \mid 1 \leq i \leq n\}$ berlaku :

$$\left| (M) \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - F(a,b) \right| \leq$$

$$(M) \sum_{i=1}^n \left| \{ f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - F(x_{i-1}, x_i) \} \right|$$

$$< \varepsilon$$

dengan $F(x_{i-1}, x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$, $i=1,2,\dots,n$. $\square$

Theorema 5.3.15 Jika f terintegral McShane pada $[a,b]$, maka primitif F -nya kontinu pada $[a,b]$. $\square$

Setiap fungsi yang terbatas akan terintegral Lebesgue jika dan hanya jika terukur. Sedangkan fungsi yang terbatas dan terukur jika dan hanya jika terintegral McShane. Jadi integral Lebesgue ekuivalen integral McShane.

Theorema 5.3.16 Fungsi f terintegral McShane pada $[a,b]$ jika dan hanya jika f terintegral Lebesgue pada $[a,b]$. $\square$

Teorema 5.3.16 memberikan arti bahnya setiap fungsi yang terintegral Lebesgue, maka fungsi tersebut terintegral McShane atau sebaliknya. Jadi

jika fungsi f terintegral Lebesgue maka jelas bahwa Lemma Sack-Henstock berlaku.

5.4 Integral Henstock

Berikut ini diuraikan definisi dan teorema-teorema integral Henstock fungsi bernilai real secara sekilas.

Definisi 5.4.1 Fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Henstock pada $[a, b]$, ditulis singkat $f \in H[a, b]$, jika terdapat bilangan real $H \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ dan untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| H - \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) \right| = \left| H - \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i) \right| < \varepsilon.$$

Jika fungsi f terintegral Henstock pada $[a, b]$ maka bilangan real H dalam Definisi 5.4.1 adalah tunggal dan ditulis

$$H = (H) \int_a^b f.$$

Teorema 5.4.2 Diberikan fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Jika fungsi f kontinu pada $[a, b]$, maka f terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan $\int_a^b f = (R) \int_a^b f$.

Bukti: Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena f terintegral Riemann pada $[a, b]$ maka terdapat fungsi konstan positif δ_1 pada $[a, b]$ sedemikian sehingga

$$\left| f(P_1) - (R) \int_a^b f \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dimana P_1 adalah partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$.

Karena f kontinu seragam pada $[a, b]$, maka terdapat $\eta > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

dimana $x, y \in [a, b]$ dan $|y - x| < \eta$.

Diberikan $\delta(x) = \min \left\{ \eta, \frac{\delta_1(x)}{2} \right\}$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Misalkan

$P = \{(x_i, [c_i, d_i]) \mid i = 1, 2, \dots, q\}$ adalah partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$

dan diberikan juga partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$

$P_1 = \{(y_i, [c_i, d_i]) \mid i = 1, 2, \dots, q\}$, sehingga :

$$\begin{aligned} \left| f(P) - (R) \int_a^b f \right| &\leq |f(P) - f(P_1)| + \left| f(P_1) - (R) \int_a^b f \right| \\ &< \sum_{i=1}^q |f(x_i) - f(y_i)|(d_i - c_i) + \varepsilon \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Karena ε bernilai sebarang, maka fungsi f terintegral Henstock pada $[a, b]$

$$\text{dan } \int_a^b f = (R) \int_a^b f. \quad \square$$

Teorema 5.4.3 Diberikan fungsi $f : [a,b] \rightarrow R$. Jika fungsi f terbatas dan terukur pada $[a,b]$, maka f terintegral Henstock pada $[a,b]$.

Bukti: Misalkan M adalah batas dari fungsi f pada $[a,b]$ dan diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$. Menurut Teorema Lusin's, maka terdapat fungsi kontinu $g : [a,b] \rightarrow R$ dalam himpunan tertutup $E \subseteq [a,b]$ sedemikian

hingga $\mu([a,b] - E) < \frac{\varepsilon}{8M}$, $f = g$ pada E dan M adalah batas dari g .

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g - \int_a^b f \right| &\leq \int_a^b |g - f| \\ &\leq 2M \mu([a,b] - E) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Karena g kontinu pada $[a,b]$, akibatnya g terintegral Henstock pada $[a,b]$, yaitu terdapat fungsi positif δ_1 pada $[a,b]$ sedemikian hingga

$$\left| g(P) - \int_a^b g \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dimana P adalah partisi Perron δ -fine pada $[a,b]$.

Didefinisikan δ pada $[a,b]$ oleh

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), \rho(x, E)\} & , x \in [a,b] - E \\ \delta_1(x) & , x \in E \end{cases}$$

($\rho(x, E) = \inf\{|y - x| : y \in E\}$ jarak antara x ke E).

Misalkan P partisi Perron δ -fine pada $[a,b]$ dan $P_1 \subseteq P$ adalah partisi Perron δ -fine pada $[a,b] - E$ dengan

$$\mu(P_1) \leq \mu([a,b] - E) < \frac{\varepsilon}{8M}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 \left| f(P) - \int_a^b f \right| &\leq |f(P) - g(P)| + \left| g(P) - \int_a^b g \right| + \left| \int_a^b g - \int_a^b f \right| \\
 &\leq 2M\mu(P_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\
 &< 2M\left(\frac{\varepsilon}{8M}\right) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Terbukti, f terintegral Henstock pada $[a, b]$. $\square$

Teorema 5.4.4 Diberikan fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Jika fungsi $f = 0$ *nearly everywhere* pada $[a, b]$, maka f terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan $\int_a^b f = 0$

Bukti: Misalkan $\{a_n : n \in \mathbb{Z}^+\} = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$ dan diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$.

Didefinisikan fungsi positif δ pada $[a, b]$ oleh

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [a, b] - \{a_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \\ \frac{\varepsilon 2^{-n-1}}{|f(a_n)|} & , x = a_n \end{cases}$$

$P = \{(\xi_i, [x_{i-1}, x_i]) \mid i = 1, 2, \dots, q\}$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$.

Misalkan π adalah himpunan indeks i sedemikian sehingga $\xi_i \in \{a_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ dan untuk setiap $i \in \pi$, pilih n_i

Sehingga $\xi_i = a_{n_i}$, maka

$$\begin{aligned}
 \left| f(P) - \int_a^b f \right| &= |f(P) - 0| \\
 &= \sum_{i \in \pi} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \sum_{i \in \Pi} 2 \left| f(a_{n_i}) \right| \delta(a_{n_i}) \\
&= \sum_{i \in \Pi} \varepsilon 2^{-n_i} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Jadi, fungsi f terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan $\int_a^b f = 0$. $\square$

Teorema 5.4.5 Misalkan fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Jika fungsi $f = 0$ almost everywhere pada $[a, b]$, maka f terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan $\int_a^b f = 0$

Bukti: Misalkan $E = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$ dengan $\mu(E) = 0$ dan untuk setiap bilangan bulat positif n diberikan $E_n = \{x \in E : n-1 \leq |f(x)| < n\}$ yang masing-masing *measure zero*.

Untuk setiap n , pilih himpunan terbuka O_n sedemikian hingga $E_n \subseteq O_n$ dan $\mu(O_n) < \varepsilon / n2^n$.

Didefinisikan fungsi positif δ pada $[a, b]$ oleh

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [a, b] - E \\ \rho(x, O_n^c), & x \in E_n \end{cases}$$

Dimana $(\rho(x, O_n^c) = \inf\{|y - x| : y \in O_n^c\})$ yaitu jarak antara x ke O_n^c .

Diberikan P partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$. Misalkan $P_n \subseteq P$, untuk setiap n . Jika I interval pada P_n , maka $I \subseteq O_n$, sehingga

$$\begin{aligned}
\left| f(P) - \int_a^b f \right| &= |f(P) - 0| \\
&\leq \sum_{n=1} |f(P_n)|
\end{aligned}$$

$$< \sum_{n=1} n\mu(O_n)$$

$$< \sum_{n=1} \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon$$

Jadi, fungsi f terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan $\int_a^b f = 0$. $\square$

Teorema 5.4.6 Jika f terintegral Henstock pada $[a,b]$ dengan fungsi primitif F maka F differensiabel hampir dimana-mana pada $[a,b]$ dan $F'(x) = f(x)$.

Bukti: Akan dibuktikan bahwa $F'(x) = f(x)$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$. Fungsi f terintegral Henstock pada $[a,b]$ dengan fungsi primitif F . Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapatlah fungsi positif $\delta(\xi)$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine pada $[a,b]$ yaitu $P = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ berlaku :

$$P \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - F(x_{i-1}, x_i)| < \varepsilon$$

Dibentuk himpunan $X = \{x \in [a,b]; F(x) \text{ tidak ada atau bila ada } F'(x) \neq f(x)\}$ Akan ditunjukkan $\mu(X) = 0$. Diambil $x \in X$ sehingga terdapatlah $\eta(x) > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\delta > 0$ ada x'_{k-1} dengan $0 < x - x'_{k-1} < \delta$, berlaku:

$$|F(x) - F(x'_{k-1}) - f(x)(x - x'_{k-1})| \geq \eta(x)|x - x'_{k-1}|$$

atau ada x'_k dengan $0 < x'_k - x < \delta$ dan berlaku :

$$|F(x'_k) - F(x) - f(x)(x'_k - x)| \geq \eta(x)|x'_k - x|$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dibentuk himpunan $X_n = \{x \in X \mid \eta(x) \geq \frac{1}{n}\}$ sehingga,

$$X = \bigcup_n X_n$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $[x'_{k-1}, x'_k]$, $k=1,2,\dots,p$ dengan $x'_{k-1}=x_k$ dan $x'_k=x_k$ sehingga,

$$X_n \subset \bigcup_{k=1}^p [x'_{k-1}, x'_k] \quad \text{dan} \quad \mu(X_n) < \sum_{k=1}^p (x'_k - x'_{k-1}) + \varepsilon$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mu(X_n) &< \sum_{k=1}^p (x'_k - x'_{k-1}) + \varepsilon \\ &< \sum_{k=1}^p \frac{1}{\eta(x_k)} |F(x'_k) - F(x'_{k-1}) - F(x_k)(x'_k - x'_{k-1})| + \varepsilon \\ &< n\varepsilon + \varepsilon \\ &= (n+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Karena nilai ε sebarang hal ini menunjukkan $\mu(X_n)=0$ dan karena $X = \bigcup_n X_n$ maka $\mu(X)=0$.

Dari hasil di atas dapat diketahui bahwa jika f terintegral Henstock pada $[a,b]$ dengan fungsi primitif $F(x)$ ada dan jika tidak ada atau $F'(x) \neq f(x)$ nilai ukurannya nol maka $F'(x)=f(x)$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$. $\square$

Teorema 5.4.7 *Jika f terintegral Henstock pada $[a,b]$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi tangga Φ sehingga*

$$\int_a^b |f - \Phi| < \varepsilon.$$

Bukti: Misalkan f terbatas pada $[a,b]$.

Didefinisikan barisan F_n pada fungsi primitive F oleh

$$F_n(x) = F(x)$$

dengan $x = a + i(b-a)2^{-n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n$ dan linier untuk x yang lain di $[a, b]$.

Misalkan $f_n(x) = F'_n(x)$ hampir dimana-mana. Hal ini karena F_n kontinu dan linier sepotong-potong.

Dengan demikian f_n adalah fungsi tangga yang nilainya terbentuk dari

$$\frac{F(y) - F(x)}{(y - x)}.$$

Karena F differensiabel hampir dimana-mana, maka barisan fungsi tangga $f_n(x)$ konvergen ke $f(x)$ hampir dimana-mana.

Dengan demikian,

$$\int_a^b |f_n - f| \text{ mendekati nol (0) untuk } n \text{ mendekati } \infty$$

Atau jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $n \geq N$ sedemikian sehingga

$$\int_a^b |f_n - f| < \varepsilon$$

Sehingga

$$\int_a^b |f_n - f| = \int_a^b |f - \Phi| < \varepsilon. \quad \square$$

Teorema 5.4.8 Jika f terintegral Henstock pada $[a, b]$, maka terdapat barisan fungsi tangga $\{f_n\}$ pada $[a, b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen ke f hampir dimana-mana pada $[a, b]$.

Bukti: Diberikan F fungsi primitif dari f .

Karena f terintegral Henstock pada $[a,b]$ dengan fungsi primitif F maka menurut Teorema 5.4.6, $F'(x) = f(x)$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$.

Didefinisikan F_n seperti dalam bukti Teorema 5.4.7.

Selanjutnya $f_n(x) = F'_n(x)$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$. Karena $f_n(x) = F'_n(x)$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$ maka, barisan fungsi tangga $\{f_n\}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen ke f hampir dimana-mana pada $[a,b]$.

Jadi terbukti bahwa, Jika f terintegral Henstock pada $[a,b]$, maka terdapat barisan fungsi tangga $\{f_n\}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen ke f hampir dimana-mana pada $[a,b]$. $\square$

Teorema 5.4.9 *Jika f terintegral Henstock pada $[a,b]$, maka f terukur pada $[a,b]$.*

Bukti: Menurut Teorema 5.4.8 bahwa f terintegral Henstock pada $[a,b]$, maka terdapat barisan fungsi tangga $\{f_n\}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen ke f hampir dimana-mana pada $[a,b]$, dan menurut Teorema 5.1.13 terdapat barisan fungsi tangga $\{f_n\}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen ke f hampir dimana-mana pada $[a,b]$, maka f terukur pada $[a,b]$.

Jadi terbukti bahwa jika f terintegral Henstock pada $[a,b]$, maka f terukur pada $[a,b]$. $\square$

Contoh 5.4.10 Diberikan fungsi $f(x) = x^3$ pada $[0,1]$, maka f terintegral Henstock pada $[0,1]$.

Bukti: Fungsi $f(x) = x^3$ pada $[0,1]$ adalah fungsi kontinu, maka menurut Teorema 5.4.2 fungsi f terintegral Henstock pada $[0,1]$ dengan nilai integralnya, yaitu

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 x^3 dx \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

5.5 Hubungan Integral McShane dan Henstock

Berikut ini diberikan hubungan antara integral Riemann, McShan, dan integral Henstock fungsi bernilai real.

Teorema 5.5.1 *Jika fungsi $f:[a,b] \rightarrow R$ terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka f terintegral McShane pada $[a,b]$.*

Bukti: Diketahui bahwa jika suatu fungsi $f:[a,b] \rightarrow R$ terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka f terbatas dan terukur pada $[a,b]$ dan jika f terbatas dan terukur pada $[a,b]$ maka f terintegral McShane.

Jadi, jika f terintegral Riemann maka f terintegral McShane. $\square$

Contoh 5.5.2 Berikut contoh fungsi f yang terintegral McShane tetapi tidak terintegral Riemann.

Fungsi $f:[a,b] \rightarrow R$ merupakan fungsi Dirichlet yang didefinisikan sebagai berikut :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasional} \\ 0, & x \text{ irrasional} \end{cases}$$

Fungsi f terintegral McShane pada $[0,1]$ dengan nilai integralnya 0, tetapi f tidak terintegral Riemann pada $[0,1]$.

Bukti: Fungsi f terintegral McShane pada $[0,1]$ dengan nilai integralnya 0. Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena banyaknya bilangan Rasional terhingga dan disimbolkan anggota bilangan Rasional pada $[0,1]$ adalah $r_1, r_2, r_3, \dots$, dan didefinisikan

$$\delta(r_i) = \varepsilon \cdot 2^{-i-1} \text{ untuk setiap } i = 1, 2, 3, \dots \text{ dan}$$

$$\delta(\xi) = 1 \quad \text{untuk } \delta \text{ irrasional.}$$

Maka dapat dibentuk suatu partisi tag bebas yang subordinat- δ pada $[0,1]$ yaitu $D = \{(\xi_i, [x_{i-1}, x_i]), i = 1, 2, \dots, n\}$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 0 \right| &= \left| \sum_{i=1}^n f(r_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &< 2 \cdot \varepsilon \sum_{i=1}^n 2^{-i-1} \\ &< \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi, terbukti f terintegral McShane ke 0 pada $[0,1]$.

Fungsi f tidak terintegral Riemann pada $[0,1]$.

Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$.

Ambil $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n > \frac{1}{\delta}$ dan dibentuk

$P := (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ sembarang partisi pada $[0,1]$.

Diperoleh $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} < \delta$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Dari fungsi di atas diperoleh bahwa $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$$= 0$$

dan $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$$= 1$$

maka

$$\begin{aligned} L(P, f) &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0 \\ U(P, f) &= \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian

$$U(P, f) - L(P, f) = 1 - 0$$

$$= 1 \geq \varepsilon$$

Sehingga f tidak terintegral Riemann pada $[0,1]$.

Alternatif lain, fungsi f terintegral McShane pada $[0,1]$

Fungsi f terbatas pada $[0,1]$ karena terdapat bilangan riil $M > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [0,1]$.

Pilih $M = \max \{0, 1\}$, maka untuk setiap $x \in [0,1]$ berlaku $|f(x)| \leq M$.

Jadi f terbatas.

Fungsi f terukur pada $[0,1]$ sebab untuk setiap bilangan riil α maka

$$A = \{x \in [0,1] \mid f(x) > \alpha\}$$

i) Jika $\alpha \leq 0$, maka $A = [0,1]$ terukur.

ii) Jika $\alpha > 1$, maka $A = \emptyset$ terukur.

iii) Jika $0 < \alpha \leq 1$, maka $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_{n-1}, r_n)$ dengan $\{r_0, r_1, \dots\}$ bilangan rasional pada $[0,1]$, karena A terhitung akibatnya A *measure zero* sehingga A terukur.

Dengan demikian menurut Teorema 5.3.10 f terintegral McShane pada $[0,1]$.

Teorema 5.5.3 Diberikan fungsi $f : [a,b] \rightarrow R$. Jika fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka fungsi f terintegral Henstock pada $[a,b]$.

Bukti: Diketahui bahwa jika suatu fungsi $f : [a,b] \rightarrow R$ terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka f terbatas dan terukur pada $[a,b]$ dan jika f terbatas dan terukur pada $[a,b]$ maka f terintegral Henstock.

Jadi terbukti bahwa jika fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka fungsi f terintegral Henstock pada $[a,b]$. $\square$

Contoh 5.5.4 Fungsi $f : [0,1] \rightarrow R$ adalah fungsi Dirichlet yang didefinisikan sebagai berikut :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasional} \\ 0, & x \text{ irrasional} \end{cases}$$

tidak terintegral Riemann pada $[0,1]$, tetapi terintegral Henstock pada $[0,1]$ dengan nilai integralnya adalah 0.

Bukti: Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena banyaknya bilangan Rasional pada $[0,1]$ tercacah, maka dimisalkan $r_1, r_2, r_3, \dots$ selanjutnya dengan mengambil

$$\delta(r_i) = \varepsilon \cdot 2^{-i-1} \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\delta(\xi) = 1 \text{ untuk } \delta \text{ irrasional.}$$

maka dapat dibentuk

$P = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ partisi Peron δ -fine pada $[0, 1]$.

Diperoleh:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 0 \right| &= \left| \sum_{i=1}^n f(r_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &< 2 \cdot \varepsilon \sum_{i=1}^n 2^{-i-1} \\ &< \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi, terbukti f terintegral Henstock pada $[0, 1]$ dengan nilai integralnya 0.

Contoh 5.5.5 Diberikan $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ untuk $0 < x \leq 1$ dan $f(0) = 0$. f

terintegral Henstock pada $[0, 1]$ dengan nilai integralnya 2, tetapi tidak terintegral Riemann atau McShane pada $[0, 1]$.

Bukti: Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$.

Ambil fungsi positif $\delta(x) = \frac{\varepsilon x}{6}$ untuk $0 < x \leq 1$

$$\delta(x) = \frac{\varepsilon^2}{16} \text{ untuk } x = 0$$

Kemudian dibentuk $P = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ partisi Peron δ -fine pada $[0, 1]$ dengan $\xi_i = 0$.

Selanjutnya,

$$\left| 2 - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| = \left| 2 - \int_{x_1}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_{x_1}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right|$$

$$= \left| 2 - (2 - 2\sqrt{x_1}) \right| + \left| \int_{x_1}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \sum_{i=2}^n \frac{(x_i - x_{i-1})}{\sqrt{\xi_i}} \right|$$

Karena $\int_{x_1}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \sum_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{x_{i-1}}} (x_i - x_{i-1})$ dan $-\frac{1}{\sqrt{\xi_i}} \leq -\frac{1}{\sqrt{x_i}}$

maka diperoleh

$$\left| 2 - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < 2\sqrt{x_1} + \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{\sqrt{x_{i-1}}} - \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right) (x_i - x_{i-1})$$

Padahal $x_i - x_{i-1} < 2\delta = \frac{\varepsilon x_i}{3}$, akibatnya $\frac{x_i}{x_{i-1}} < \frac{3}{3-\varepsilon}$.

Lebih lanjut diperoleh

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x_1} + \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{\sqrt{x_{i-1}}} - \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right) (x_i - x_{i-1}) &< 2\sqrt{\delta(0)} + \frac{\varepsilon}{3-\varepsilon} \sum_{i=2}^n (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti bahwa f terintegral Henstock pada $[0,1]$ dengan nilai integralnya 2.

Fungsi $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ untuk $0 < x \leq 1$ dan $f(0) = 0$ tidak terbatas pada $[0,1]$.

Andaikan fungsi $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ terbatas pada $[0,1]$, maka terdapat bilangan

Riel $M > 0$, sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [0,1]$, tetapi

pilih $x = \frac{1}{(M+1)^2}$ dan $x \in [0,1]$.

$$\text{Maka } f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(M+1)^2}}} = M+1 > M.$$

Kontradiksi bahwa f terbatas pada $[0,1]$.

Jadi terbukti bahwa f tidak terbatas pada $[0,1]$.

Menurut Teorema, maka f tidak terintegral Riemann maupun McShane pada $[0,1]$.

Teorema 5.5.6 *Jika fungsi $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral McShane pada $[a,b]$, maka fungsi f terintegral Henstock pada $[a,b]$.*

Bukti: Menurut teorema jika fungsi f terintegral McShane, maka f terbatas dan terukur. Sedangkan jika fungsi f terbatas dan terukur, maka f terintegral Henstock.

Terbukti bahwa jika fungsi f terintegral McShane pada $[a,b]$, maka fungsi f terintegral Henstock pada $[a,b]$. $\square$

Setiap fungsi yang terintegral Riemann maka terintegral Lebesgue, McShane, dan Henstock. Sedangkan setiap fungsi yang terintegral Lebesgue juga terintegral McShane atau sebaliknya. Selanjutnya, setiap fungsi yang terintegral McShane atau Lebesgue maka terintegral Henstock.

Jadi, hubungan antara integral Riemann, Lebesgue, McShane, dan integral Henstock, yaitu

$$R[a,b] \subset L[a,b] \cong M[a,b] \subset H[a,b].$$

BAB 6

Integral Dunford

Pada bab ini dibicarakan fungsi terukur bernilai Banach. Melalui fungsi terukur lemah tersebut dikonstruksi Lemma Dunford yang menjamin adanya integral Dunford. Dibahas sifat-sifat sederhana dari integral Dunford. Ditunjukkan bahwa koleksi semua fungsi yang terintegral Dunford merupakan ruang linear. Selanjutnya dibicarakan fungsi primitive dari integral Dunford.

6.1 Fungsi Terukur Lemah

Diberikan f fungsi bernilai Banach X pada interval tertutup $[a, b]$. Berikut ini didefinisikan fungsi terukur bernilai Banach dan fungsi terukur lemah beserta teorema yang terkait.

Definisi 6.1.1 Fungsi $f : [a, b] \rightarrow X$ dikatakan sederhana jika ada himpunan terukur $A_i \subset [a, b]$, $i = 1, 2, \dots, n$ sehingga

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ untuk setiap } i \neq j$$

dan

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

dengan $f(x) = y_i \in X$ untuk $x \in A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, yaitu fungsi f adalah fungsi konstan pada himpunan terukur A_i .

Himpunan atau koleksi semua fungsi sederhana pada $[a, b]$ dinotasikan dengan $\mathcal{J}(\mu, X) = \mathcal{J}$. Jelas bahwa $\mathcal{J}$ merupakan ruang linear (ruang

vektor). Jika f adalah fungsi sederhana maka $\|f\|_X : [a, b] \rightarrow R$ juga merupakan fungsi sederhana. Berdasarkan fungsi sederhana, dapat didefinisikan fungsi terukur sebagai berikut.

Definisi 6.1.2 Fungsi $f : [a, b] \rightarrow X$ dikatakan terukur jika ada barisan fungsi sederhana (f_n) , $f_n \in \mathcal{J}$, $n \in N$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_X = 0,$$

untuk setiap $x \in [a, b]$.

Berdasarkan Definisi fungsi terukur, jika f fungsi sederhana pada $[a, b]$ maka f merupakan fungsi terukur pada $[a, b]$. Selanjutnya jika fungsi $f : [a, b] \rightarrow X$ terukur maka fungsi bernilai real $\|f\|_X : [a, b] \rightarrow R$ juga merupakan fungsi terukur.

Teorema 6.1.3 Jika $f : [a, b] \rightarrow X$ fungsi terukur maka fungsi real $\|f\|_X : [a, b] \rightarrow R$ fungsi terukur.

Bukti: Karena $f : [a, b] \rightarrow X$ fungsi terukur, maka ada barisan fungsi sederhana (f_n) , $f_n \in \mathcal{J}$, $n \in N$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0,$$

untuk setiap $t \in [a, b]$.

Karena f_n fungsi sederhana untuk setiap $n \in N$, maka $\|f_n\|_X$ juga merupakan fungsi sederhana untuk setiap $n \in N$. Oleh karena itu f_n fungsi terukur, sehingga

$$\left| \|f_n(t)\|_X - \|f(t)\|_X \right| \leq \|f_n(t) - f(t)\|_X,$$

untuk setiap $t \in [a, b]$.

Hal ini berarti bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t)\|_X = \|f(t)\|_X$, yaitu $\|f\|_X$ terukur. $\square$

Selanjutnya diberikan definisi mengenai fungsi terukur lemah, yaitu dikaitkan dengan dual dari ruang Banach X .

Definisi 6.1.4 Fungsi $f : [a, b] \rightarrow X$ dikatakan terukur lemah jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi real $x^*(f) : [a, b] \rightarrow R$ terukur.

Menurut Definisi 6.1.4 dan Definisi 6.1.2 maka dapat diperoleh bahwa setiap fungsi terukur merupakan fungsi terukur lemah.

Teorema 6.1.5 Jika $f : [a, b] \rightarrow X$ terukur, maka $f : [a, b] \rightarrow X$ terukur lemah.

Bukti: Karena $f : [a, b] \rightarrow X$ terukur maka ada barisan fungsi sederhana (f_n) , $f_n \in \mathcal{J}$, $n \in N$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0,$$

untuk setiap $t \in [a, b]$.

Diambil sebarang $x^* \in X^*$, maka berlaku

$$\left| x^*(f_n(t) - f(t)) \right| \leq \|x^*\|_X \|f_n(t) - f(t)\|_X.$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} |x^*(f_n(t) - f(t))| = 0$.

Jadi, ada barisan fungsi sederhana (f_n) , $f_n \in \mathcal{J}$, $n \in \mathbb{N}$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x^*(f_n(t) - f(t))| = 0,$$

untuk setiap $t \in [a, b]$.

Hal ini berarti $x^*(f): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terukur untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jadi, $f: [a, b] \rightarrow X$ terukur lemah. $\square$

Berdasarkan fungsi terukur lemah dikonstruksi lemma yang menjamin eksistensi dari integral Dunford.

Lemma 6.1.6 (Dunford) *Jika fungsi $f: [a, b] \rightarrow X$ terukur lemah dan untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^*(f): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Lebesgue, yaitu $x^*(f) \in L$, maka untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ terdapat tunggal $x_{(f, A)}^{**} \in X^{**}$ sehingga*

$$x_{(f, A)}^{**}(x^*) = \int_A x^*(f),$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Bukti: Diambil sebarang interval tertutup $A \subset [a, b]$, maka untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

$$\int_A x^* f = \int_{[a, b]} x^* f \chi_A.$$

Didefinisikan fungsi $T_A: X^* \rightarrow L$, fungsi dari dual ruang Banach X ke ruang fungsi terintegral Lebesgue oleh

$$T_A(x^*) = x^* f \chi_A,$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Selanjutnya didefinisikan fungsi $F_A : X^* \rightarrow R$ oleh,

$$F_A(x^*) = \int_A x^* f = \int_{[a,b]} x^* f \chi_A.$$

Diperoleh bahwa F_A merupakan fungsional linier pada X^* , yaitu untuk sebarang $x^*, y^* \in X^*$ dan sebarang skalar $c \in R$ berlaku

$$\begin{aligned} F_A(x^* + y^*) &= \int_A (x^* + y^*) f \\ &= \int_A x^* f + \int_A y^* f \\ &= F_A(x^*) + F_A(y^*), \\ F_A(cx^*) &= \int_A (cx^*) f \\ &= c \int_A x^* f \\ &= cF_A(x^*). \end{aligned}$$

Misalkan untuk sebarang barisan $\{x_n^*\} \subset X^*$ yang konvergen ke $x^* \in X^*$ maka dapat ditunjukkan bahwa barisan $\{T_A(x_n^*)\}$ akan konvergen ke $g \in L$, yaitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |x_n^* f - g| = 0.$$

Menurut Teorema Riez terdapat subbarisan $\{x_{n_k}^*\}, k \in \mathbb{N}$ dari $\{x_n^*\}$ sedemikian sehingga

$$x_{n_k}^* (f(x) \chi_A(x)) \rightarrow g(x), k \rightarrow \infty$$

untuk setiap $x \in [a, b]$.

Oleh karena $x_n^* (f(x) \chi_A(x)) \rightarrow x^* (f(x) \chi_A(x))$, $n \rightarrow \infty$

untuk setiap $x \in [a, b]$.

Hal ini berarti bahwa $g(x) = x^* (f(x) \chi_A(x))$ untuk setiap $x \in [a, b]$ dan $x^* (f \chi_A) \in L$.

Dengan kata lain bahwa $T_A : X^* \rightarrow L$ tertutup.

Menurut *Banach closed graph theorem* maka operator T_A terbatas.

Dengan demikian

$$|F_A(x^*)| = \left| \int_A x^* f \right| \leq \int_A |x^* f| = \int_A |T_A(x^*)| = \|T_A(x^*)\|_{L_1} \leq \|T_A\| \|x^*\|.$$

Jadi,

$$\left| \int_A x^* f \right| \leq \|T_A\| \|x^*\|.$$

Oleh karena itu, $\int_A x^* f$ merupakan fungsional linear kontinu pada X^*

yang pendefisiannya oleh $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$. $\square$

6.2 Integral Dunford

Berdasarkan Lemma Dunford, maka dapat didefinisikan integral Dunford sebagai berikut.

Definisi 6.2.1 Fungsi $f : [a, b] \rightarrow X$ dikatakan terintegral Dunford pada $[a, b]$, jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi real $x^*(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral

Lebesgue dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ terdapat vektor

$x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (L) \int_A x^*(f),$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Nilai integral Dunford $(D_L) \int_A f$, fungsi f atas interval tertutup $A \subset [a, b]$

diberikan oleh $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$, yaitu

$$x_{(f,A)}^{**} = (D_L) \int_A f,$$

dimana $x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (L) \int_A x^*(f)$, untuk setiap $x^* \in X^*$.

Himpunan semua fungsi f yang terintegral Dunford pada $[a, b]$ ditulis $D_L[a, b]$. Jika $f : [a, b] \rightarrow X$ dan $f \in D_L[a, b]$ berarti bahwa $x^*(f) \in L$ untuk setiap $x^* \in X^*$.

Teorema eksistensi ketunggalan nilai suatu integral Dunford.

Teorema 6.2.2 Jika $f \in D_L[a, b]$, maka untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ vektor $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ tunggal.

Bukti: Diberikan sebarang interval tertutup $A \subset [a, b]$. Andaikan terdapat vektor $x_{1(f,A)}^{**} \in X^{**}$ dan $x_{2(f,A)}^{**} \in X^{**}$ maka

$$x_{1(f,A)}^{**}(x^*) = (L) \int_A x^*(f) \text{ dan}$$

$$x_{2(f,A)}^{**}(x^*) = (L) \int_A x^*(f).$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} x_{1(f,A)}^{**}(x^*) - x_{2(f,A)}^{**}(x^*) &= (L) \int_A x^*(f) - (L) \int_A x^*(f) \\ &= 0, \quad \forall x^* \in X^*. \end{aligned}$$

Jadi $x_{1(f,A)}^{**} = x_{2(f,A)}^{**}$. $\square$

Teorema 6.2.3 Jika fungsi f terintegral Dunford pada $[a,b]$, maka f terintegral Dunford pada A untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$.

Bukti: Jelas menurut Definisi 6.2.1. $\square$

Contoh suatu fungsi yang terintegral Dunford pada $[a,b]$ adalah fungsi konstan.

Contoh 6.2.4 Diberikan fungsi konstan $f(x) = c$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka f terintegral Dunford pada $[a,b]$. $\square$

Teorema 6.2.5 Fungsi f terintegral Dunford pada $[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$.

Bukti: Diketahui fungsi f terintegral Dunford pada $[a,b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi real $x^* f$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$.

Sebaliknya jika fungsi real $x^* f$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ maka f terintegral Dunford pada $[a,b]$. $\square$

Contoh 6.2.6 Jika f terintegral Lebesgue (atau McShane) pada $[a, b]$, maka f terintegral Dunford pada $[a, b]$.

Contoh 6.2.7 Jika f terintegral Riemann pada $[a, b]$, maka f terintegral Dunford pada $[a, b]$.

Bukti: Hal ini karena setiap fungsi terintegral Riemann maka terintegral Lebesgue. Selanjutnya jika fungsi f terintegral Lebesgue maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f$ juga terintegral Lebesgue. Oleh karena itu fungsi f terintegral Dunford. $\square$

Koleksi semua fungsi f yang terintegral Dunford pada $[a, b]$, dinotasikan $D_L[a, b]$ dan merupakan ruang linear.

Teorema 6.2.8 $D_L[a, b]$ adalah ruang linear.

Bukti: Diambil sebarang $f, g \in D_L[a, b]$ dan sebarang $c \in \mathbb{R}$. Ditunjukkan bahwa $f + g \in D_L[a, b]$ dan $cf \in D_L[a, b]$.

Karena $f, g \in D_L[a, b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi real $x^* f$ dan $x^* g$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$. Oleh karena itu untuk setiap $x^* \in X^*$ $x^*(f + g) = x^* f + x^* g$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$.

Jadi, fungsi $f + g$ terintegral Dunford pada $[a, b]$, yaitu $f + g \in D_L[a, b]$

Karena $f \in D_L[a, b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi real $x^* f$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$. Oleh karena itu untuk sebarang skalar $c \in \mathbb{R}$ dan

untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^*(cf) = cx^*f$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$.

Jadi, fungsi cf terintegral Dunford pada $[a, b]$, yaitu $cf \in D_L[a, b]$.

Jadi, $D_L[a, b]$ ruang linier. $\square$

Teorema 6.2.9 Jika $f = \theta$ hampir dimana-mana pada $[a, b]$, maka $f \in D_L[a, b]$ dan jika $A \subset [a, b]$ himpunan terukur maka

$$x_{(f,A)}^{**} = \theta.$$

Bukti: Karena $f = \theta$ hampir dimana-mana pada $[a, b]$, maka ada himpunan terukur $A \subset [a, b]$ dengan $\mu_\alpha(A) = 0$ sehingga jika $x^* \in X^*$ berlaku

$$x^*f(x) \begin{cases} = 0, & x \in [a, b] - A \\ \neq 0, & x \in A \end{cases}.$$

Dibentuk $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ dengan

$$A_k = \{x \in A : k-1 \leq \|f(x)\| \leq k, k=1, 2, 3, \dots\} \subset A \text{ dan } \mu_\alpha(A_k) = 0.$$

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka untuk suatu k terdapat himpunan terbuka

$$O_k \text{ dengan } \mu_\alpha(O_k) < \frac{\varepsilon}{k2^k} \text{ sehingga } O_k \supset A_k.$$

Didefinisikan fungsi positif δ pada $[a, b]$ sedemikian sehingga $N(x, \delta(x)) \subset O_k$ untuk $x \in A_k$, $k=1, 2, 3, \dots$ dan sebarang fungsi positif untuk x yang lain.

Oleh karena itu, untuk sebarang $A \subset [a, b]$ himpunan terukur berlaku

$$\left| \int_A x^*(f) - 0 \right| = \left| \int_{x \in A_k} x^*(f) + \int_{x \notin A_k} x^*(f) \right| = \left| \int_{x \in A_k} x^*(f) \right|$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} \|x^*\| k \frac{\varepsilon}{2^k k} = \varepsilon$$

untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $\|x^*\| \leq 1$.

Hal ini berarti $x^* f \in L[a, b]$ dan untuk himpunan terukur $A \subset [a, b]$ terdapat vektor $x_{(f, A)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f, A)}^{**}(x^*) = (L) \int_A x^* f = 0.$$

Jadi $f \in D_L[a, b]$ dan $x_{(f, A)}^{**} = \theta$. $\square$

Fungsi f dan g dikatakan ekuivalen, jika $f = g$ hampir dimana-mana pada $[a, b]$, yaitu jika terdapat himpunan terukur- α $A \subset [a, b]$ dengan $\mu_\alpha(A) = 0$ sehingga

$$f(x) = g(x),$$

untuk setiap $x \in [a, b] - A$.

Selanjutnya dibahas fungsi primitif integral Dunford pada $[a, b]$ dan sifat-sifat sederhana dari fungsi primitifnya. Kemudian dibahas sifat-sifat terkait fungsi kontinu mutlak (*Absolutely Continuous*), fungsi kontinu mutlak kuat (*Strictly Absolutely Continuous*), dan generalisasinya (*Generalized Absolutely Continuous*). Sifat-sifat terkait fungsi bervariasi terbatas (*Bounded Variation Function*), fungsi bervariasi terbatas kuat (*Strictly Bounded Variation Function*), dan generalisasinya (*Generalized Bounded Variation Function*).

6.3 Fungsi Primitif Integral Dunford

Berikut ini dibahas fungsi primitif dari fungsi f yang terintegral Dunford pada $[a, b]$.

Definisi 6.3.1 Diberikan X ruang Banach, $\mathcal{I}[a, b]$ koleksi semua interval tertutup di dalam $[a, b]$ dan fungsi $f : [a, b] \rightarrow X$. Jika f terintegral Dunford pada $[a, b]$ maka $F : \mathcal{I}[a, b] \rightarrow X$ dengan rumus:

$$F(A) = x_{(f, A)}^{**} = (D_L) \int_A f$$

dan $F(\emptyset) = 0$ untuk setiap $A \in \mathcal{I}[a, b]$ disebut Primitif Dunford fungsi f pada $[a, b]$.

Contoh 6.3.2 Didefinisikan fungsi $f : [a, b] \rightarrow X$ oleh

$$f(x) = c,$$

untuk setiap $x \in [a, b]$ dan suatu konstanta $c \in X$, maka untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ fungsi primitive Dunford fungsi f adalah $F(A) = c\alpha(A)$.

Bukti: mudah dibuktikan bahwa fungsi konstan $f(x) = c$ terintegral Dunford pada $[a, b]$. Hal ini berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi real $x^*(f): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Lebesgue dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ terdapat $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (L) \int_A x^*(f), = (L) \int_A x^*(c) = x^* c \alpha(A).$$

Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ dan interval tertutup $A \subset [a, b]$ berlaku

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = x^* c \alpha(A).$$

Jadi $F(A) = x_{(f,A)}^{**} = (D_L) \int_A f = c \alpha(A)$. $\square$

Definisi 6.3.3 Diberikan $\mathcal{J}[a, b]$ koleksi semua interval tertutup di dalam $[a, b]$. Fungsi $F: \mathcal{J}[a, b] \rightarrow X$ dikatakan aditif jika

$$F(A \cup B) = F(A) + F(B)$$

untuk setiap $A, B \in \mathcal{J}[a, b]$ dengan $A \cap B = \emptyset$ dan $A \cup B \in \mathcal{J}[a, b]$.

Teorema 6.3.4 Jika $f \in D_L[a, b]$ dengan F sebagai primitif Dunfordnya maka F merupakan fungsi aditif pada $[a, b]$.

Bukti: Diketahui $f \in D_L[a, b]$. Diberikan $A \subset [a, b]$ dan $B \subset [a, b]$ berturut-turut sebarang interval tertutup, $A \cup B \subset [a, b]$ dan tidak saling tumpang-tindih maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan terdapat vektor $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ dan vektor $x_{(f,B)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (L) \int_A x^* f \text{ dan}$$

$$x_{(f,B)}^{**}(x^*) = (L) \int_B x^* f .$$

Karena $A \subset [a, b]$ dan $B \subset [a, b]$ berturut-turut interval tertutup maka $A \cup B \subset [a, b]$ juga interval tertutup. Oleh karena itu terdapat vektor

$x_{(f,A \cup B)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$\begin{aligned} x_{(f,A)}^{**}(x^*) + x_{(f,B)}^{**}(x^*) &= (L) \int_A x^* f + (L) \int_B x^* f \\ &= (L) \int_{A \cup B} x^* f \\ &= x_{(f,A \cup B)}^{**}(x^*) \end{aligned}$$

Jadi

$$x_{(f,A \cup B)}^{**} = x_{(f,A)}^{**} + x_{(f,B)}^{**} \text{ atau } F(A \cup B) = F(A) + F(B).$$

Terbukti bahwa F merupakan fungsi aditif pada $[a, b]$. $\square$

Akibat 6.3.5 Jika $f \in D_L[a, b]$ dengan F sebagai primitif Dunfordnya dan

$A_1, A_2, \dots, A_n$ masing-masing interval tertutup di dalam $[a, b]$ yang tak

saling tumpang-tindih dengan $\bigcup_{i=1}^n A_i = [a, b]$ maka

$$F\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n F(A_i) = \sum_{i=1}^n x_{(f,A_i)}^{**}$$

Bukti: Diketahui $f \in D_L[a, b]$ dengan F sebagai primitif Dunford fungsi

f pada $[a, b]$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = [a, b]$ dengan $\mu_\alpha(A_i \cap A_j) = 0$ untuk setiap $i \neq j$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} F\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= x_{\left(f, \bigcup_{i=1}^n A_i\right)}^{**} = x_{(f, A_1)}^{**} + x_{(f, A_2)}^{**} + \dots + x_{(f, A_n)}^{**} \\ &= F(A_1) + F(A_2) + \dots + F(A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n F(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_{(f, A_i)}^{**}. \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } F\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n x_{(f, A_i)}^{**}. \quad \square$$

Selanjutnya berdasarkan Definisi 6.2.1 dan Definisi 6.3.1 serta ekuivalensi integral Lebesgue dengan integral McShane, maka integral Dunford pada $[a, b]$ dapat dinyatakan seperti dalam teorema berikut.

Teorema 6.3.6 Fungsi $f \in D_L[a, b]$ jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif F pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ dan jika $A \subset [a, b]$ interval tertutup dan $\mathcal{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ partisi tag(McShane) δ -fine pada A berlaku

$$\left| \sum_{i=1}^n x^* (f(x_i) \alpha(D_i) - F(D_i)) \right| < \varepsilon$$

atau

$$\left| \sum_{i=1}^n x^* f(x_i) \alpha(D_i) - x^* F(A) \right| < \varepsilon . \quad \square$$

Teorema 6.3.7 (Lemma Sack-Henstock) Fungsi $f \in D_L[a, b]$ dengan fungsi primitif F , yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga jika $A \subset [a, b]$ interval tertutup dan $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ partisi tag (McShane) δ -fine pada A berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum x^* f(x) \alpha(D) - x^* F(D) \right| < \varepsilon$$

maka untuk setiap jumlahan bagian $\sum_1$ dari $\mathcal{D}$ berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum_1 x^* f(x) \alpha(D) - x^* F(D) \right| < \varepsilon . \quad \square$$

Teorema 6.3.8 Jika $f \in D_L[a, b]$ dengan fungsi primitif F maka F kontinu pada $[a, b]$.

Bukti: Berdasarkan Sack-Henstock Lemma dan pertidaksamaan

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|_X &\leq \|F(x) - F(y) - f(y)(x - y)\|_X \\ &+ \|f(y)\|_X |x - y|. \quad \square \end{aligned}$$

Berikut ini dibahas fungsi kontinu mutlak dan fungsi kontinu mutlak kuat kaitannya dengan fungsi primitif dari fungsi f yang terintegral Dunford pada $[a, b]$.

Definisi 6.3.9 Diberikan fungsi $F : [a, b] \rightarrow X$ dan $A \subset [a, b]$. Fungsi F dikatakan kontinu mutlak (absolutely continuous) pada A , ditulis $F \in AC(A)$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$

dan jika $\{(c_i, d_i)\}$ barisan selang terbuka pada $[a, b]$ dengan $c_i, d_i \in A$

dan $\sum_{i=1}^{\infty} (d_i - c_i) < \delta$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|F(c_i, d_i)\|_X = \sum_{i=1}^{\infty} \|F(d_i) - F(c_i)\|_X < \varepsilon.$$

Definisi 6.3.10 Fungsi F dikatakan kontinu mutlak kuat (restricly absolutely continuous) pada A , ditulis $F \in AC^*(A)$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ dan jika $\{(c_i, d_i)\}$ barisan selang terbuka di dalam $[a, b]$ dengan $c_i, d_i \in A$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} (d_i - c_i) < \delta$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [c_i, d_i]) < \varepsilon$$

dengan $\omega(F; [c_i, d_i]) = \sup \{\|F(x) - F(y)\|_X : x, y \in [c_i, d_i], i \geq 1\}.$

Teorema 6.3.11 Jika $F \in AC^*(A)$ maka $F \in AC(A)$.

Bukti : Menurut Definisi 6.3.10, $F \in AC^*(A)$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ dan jika $\{(c_i, d_i)\}$ barisan selang terbuka di dalam $[a, b]$ dengan $c_i, d_i \in A$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} (d_i - c_i) < \delta$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [c_i, d_i]) < \varepsilon.$$

Hal ini berarti

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \|F(d_i) - F(c_i)\|_X &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup \{ \|F(x) - F(y)\|_X : x, y \in [c_i, d_i], i \geq 1 \} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [c_i, d_i]) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Dengan kata lain $F \in AC(A)$. $\square$

Teorema 6.3.12 Diketahui $A \subset [a, b]$ interval tertutup,

$(a, b) - A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (c_k, d_k)$ dan fungsi F kontinu pada $[a, b]$. Pernyataan

dibawah ini ekuivalen:

(i). $F \in AC^*(A)$

(ii). $F \in AC(A)$ dan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega(F; [c_k, d_k]) < \infty.$$

(iii). Untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ dan jika

$\{(a_n, b_n)\}$ barisan interval buka dengan $a_n \in A$ atau $b_n \in A$ dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \delta \text{ berlaku}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|F(b_n) - F(a_n)\|_X < \varepsilon.$$

Bukti : Ditunjukkan (i) maka (ii)

Menurut Teorema 6.3.11 bahwa jika $F \in AC^*(A)$ maka $F \in AC(A)$.

Akan ditunjukkan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(F; [c_k, d_k]) < \infty$.

Karena $F \in AC^*(A)$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ dan jika $\{(a_i, b_i)\}$ barisan interval terbuka di dalam $[a, b]$ dengan

$$a_i, b_i \in A \text{ dan } \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \delta \text{ berlaku}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [a_i, b_i]) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diperhatikan bahwa $\sum_{i=1}^{\infty} (d_i - c_i) < b - a$ berhingga

Jadi terdapat bilangan Asli n_0 sehingga $\sum_{n \geq n_0} (d_i - c_i) < \delta$.

Dengan demikian berlaku

$$\sum_{n \geq n_0} \omega(F; [c_n, d_n]) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Karena $[c_k, d_k]$ dengan $k \leq n_0$ berhingga dan karena F kontinu pada $[a, b]$ maka F kontinu pada $[c_k, d_k]$.

Oleh karena itu

$$\omega(F; [c_k, d_k]) < \infty \text{ untuk } k \leq n_0.$$

Jadi

$$\sum_{k=1}^{n_0} \omega(F; [c_k, d_k]) < \infty.$$

Karena $\sum_{n \geq n_0} \omega(F; [c_n, d_n]) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\sum_{k=1}^{n_0} \omega(F; [c_k, d_k]) < \infty$ maka diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega(F; [c_k, d_k]) < \infty.$$

Akan ditunjukkan (ii) maka (iii).

Diketahui $F \in AC(A)$ dan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega(F; [c_k, d_k]) < \infty.$$

Untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan Asli n_0 sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku

$$\sum_{k \geq n_0} \omega(F; [c_k, d_k]) < \varepsilon.$$

Karena $F \in AC(A)$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ dan jika $\{(c_k, d_k)\}$ barisan interval terbuka pada $[a, b]$ dengan

$c_k, d_k \in A$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} (d_k - c_k) < \delta$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|F(c_k, d_k)\|_X = \sum_{k=1}^{\infty} \|F(d_k) - F(c_k)\|_X < \varepsilon.$$

Karena F kontinu pada $[a, b]$, maka F kontinu seragam pada $[a, b]$, yaitu untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan $\delta > 0$ dan untuk setiap $x, y \in [a, b]$, x adalah salah satu titik c_k atau d_k , $k = 1, 2, \dots, n$ dengan sifat $|x - y| < \delta$ berlaku

$$\|F(x) - F(y)\|_X < \frac{\varepsilon}{n_0}.$$

Dibentuk barisan behingga atau tak berhingga selang terbuka $\{(a_k, b_k)\}$

dengan $a_k \in A$ atau $b_k \in A$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$.

Diandaikan $a_k \in A$ dan $b_k \notin A$.

Diambil sebarang $\gamma \in (a_k, b_k)$

Jika $\gamma \in A$ maka berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|F(a_k, b_k)\|_X = \sum_{k=1}^{\infty} \|F(b_k) - F(a_k)\|_X < \varepsilon.$$

Jika $\gamma \notin A$ maka berlaku

$$\sum_{k \geq n_0} \|F(b_k) - F(a_k)\|_X \leq \sum_{k \geq n_0} \omega(F; [a_k, b_k]) < \varepsilon.$$

dan

$$\|F(b_k) - F(a_k)\|_X < \frac{\varepsilon}{n_0}.$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|F(b_k) - F(a_k)\|_X &= \sum_{k=1}^{n_0} \|F(b_k) - F(a_k)\|_X + \sum_{k \geq n_0} \|F(b_k) - F(a_k)\|_X \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan (iii) maka (i).

Diketahui untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ dan jika $\{(a_n, b_n)\}$ barisan interval buka dengan $a_n \in A$ atau $b_n \in A$ dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \delta \text{ berlaku}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|F(b_n) - F(a_n)\|_X < \varepsilon.$$

Akan ditunjukkan bahwa $F \in AC^*(A)$.

Menurut yang diketahui jika $a_n, b_n \in A$ maka $F \in AC(A)$.

Untuk setiap $(\alpha_n, \beta_n) \subset (a_n, b_n)$ diperoleh

$$(b_n - a_n) = (\alpha_n - a_n) + (\beta_n - \alpha_n) + (b_n - \beta_n).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - a_n) < \delta; \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n) < \delta; \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - \beta_n) < \delta$$

Jadi

$$F(b_n) - F(a_n) = F(\alpha_n) - F(a_n) + F(\beta_n) - F(\alpha_n) + F(b_n) - F(\beta_n)$$

$$F(\beta_n) - F(\alpha_n) = F(b_n) - F(a_n) + F(a_n) - F(\alpha_n) + F(\beta_n) - F(b_n)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \|F(\beta_n) - F(\alpha_n)\|_X &= \|F(b_n) - F(a_n) + F(a_n) - F(\alpha_n) + F(\beta_n) - F(b_n)\|_X \\ &\leq \|F(b_n) - F(a_n)\|_X + \|F(a_n) - F(\alpha_n)\|_X + \|F(\beta_n) - F(b_n)\|_X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|F(\beta_n) - F(\alpha_n)\|_X &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|F(b_n) - F(a_n)\|_X + \sum_{n=1}^{\infty} \|F(a_n) - F(\alpha_n)\|_X \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \|F(\beta_n) - F(b_n)\|_X \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ &= 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini berakibat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(F; [a_n, b_n]) < 3\varepsilon.$$

Jadi $F \in AC^*(A)$. $\square$

Teorema 6.3.13 Diketahui $F : [a, b] \rightarrow X$. Jika F kontinu di $c \in [a, b]$ dan $F \in AC^*(A)$ untuk suatu $A \subset [a, b]$ maka $F \in AC^*(A \cup \{c\})$.

Bukti: Diketahui F kontinu di $c \in [a, b]$ dan $F \in AC^*(A)$ untuk suatu $A \subset [a, b]$. Berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga jika

(i) $\{(a_i, b_i)\}$ barisan interval buka yang saling asing dengan $a_i, b_i \in A$

dan $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \delta_1$ maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [a_i, b_i]) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(ii) $x \in \left(c - \frac{\delta_2}{2}, c + \frac{\delta_2}{2}\right)$ maka

$$\|F(c) - F(x)\|_x < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Jadi, jika $x, y \in \left(c - \frac{\delta_2}{2}, c + \frac{\delta_2}{2}\right)$ maka berlaku

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|_x &\leq \|F(x) - F(c)\|_x + \|F(c) - F(y)\|_x \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Hal ini berarti

$$\omega\left(F; \left(c - \frac{\delta_2}{2}, c + \frac{\delta_2}{2}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Maka diperoleh $F \in AC^*(A \cup \{c\})$. $\square$

Teorema 6.3.14 Diketahui $F : [a, b] \rightarrow X$. Jika F kontinu pada $[a, b]$ dan $F \in AC^*(A)$ untuk suatu $A \subset [a, b]$ maka $F \in AC^*(\bar{A})$.

Bukti: Diketahui F kontinu pada $[a, b]$ dan $F \in AC^*(A)$ untuk suatu $A \subset [a, b]$. Berarti untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ dan jika $\{(a_i, b_i)\}$ barisan interval buka yang saling asing dengan $a_i, b_i \in A$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \delta$ maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [a_i, b_i]) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil barisan interval buka $\{(c_i, d_i)\}$ yang saling asing dengan $c_i, d_i \in \bar{A}$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} (d_i - c_i) < \delta$.

Karena $c_i, d_i \in \bar{A}$ dengan $\bar{A}$ interval tertutup dan F kontinu pada $[a, b]$ maka ada barisan $\{u_{ik}\}$ dan $\{v_{ik}\}$ di dalam A sehingga $c_i < u_k$ dan $v_k < d_i$ dan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{ik} = c_i \text{ dan } \lim_{k \rightarrow \infty} v_{ik} = d_i.$$

Hal ini berakibat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(u_{ik}) = F(c_i) \text{ dan } \lim_{k \rightarrow \infty} F(v_{ik}) = F(d_i),$$

Lebih lanjut karena

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{ik} - u_{ik}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (d_i - c_i) < \delta$$

Maka berakibat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega(F; [u_{ik}, v_{ik}]) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [c_i, d_i]) &= \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \omega(F; [u_{ik}, v_{ik}]) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [u_{ik}, v_{ik}]) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Jadi, $F \in AC^*(\bar{A})$. $\square$

Berikut ini dibahas fungsi bervariasi terbatas dan kaitannya dengan fungsi primitif integral Dunford pada $[a, b]$.

Definisi 6.3.15 Diberikan X ruang Banach dan fungsi $F : [a, b] \rightarrow X$. Fungsi F dikatakan bervariasi terbatas pada $A \subset [a, b]$, ditulis $F \in BV(A)$, jika ada bilangan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap barisan interval buka $\{(a_i, b_i)\}$ yang saling asing dengan $a_i, b_i \in A$ maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|F(b_i) - F(a_i)\|_X \leq M.$$

Definisi 6.3.16 Diberikan X ruang Banach dan fungsi $F : [a, b] \rightarrow X$. Fungsi F dikatakan bervariasi terbatas kuat pada $A \subset [a, b]$, ditulis $F \in BV^*(A)$, jika ada bilangan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap barisan interval buka $\{(a_i, b_i)\}$ yang saling asing dengan $a_i, b_i \in A$ maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [a_i, b_i]) \leq M.$$

Teorema 6.3.17 Jika $F \in AC(A)$ maka $F \in BV(A)$.

Bukti: Diketahui $F \in AC(A)$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (misalkan $\varepsilon = 1$) terdapat bilangan $\delta > 0$ dan jika $\{(c_i, d_i)\}$ barisan selang terbuka pada $[a, b]$ dengan $c_i, d_i \in A$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} (d_i - c_i) < \delta$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|F(c_i, d_i)\|_X < \varepsilon = 1.$$

Akan ditunjukkan ada ada bilangan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap barisan interval buka $\{(c_i, d_i)\}$ yang saling asing dengan $c_i, d_i \in A$ maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|F(c_i, d_i)\|_X = \sum_{i=1}^{\infty} \|F(d_i) - F(c_i)\|_X \leq M.$$

Pilih $M = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|F(c_i, d_i)\|_X, 1 : c_i, d_i \in A \right\}$.

Jadi ada bilangan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap barisan interval buka $\{(c_i, d_i)\}$ yang saling asing dengan $c_i, d_i \in A$ maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|F(c_i, d_i)\|_X = \sum_{i=1}^{\infty} \|F(d_i) - F(c_i)\|_X \leq M.$$

Hal ini berarti $F \in BV(A)$. $\square$

Teorema 6.3.18 Jika $F \in AC^*(A)$ maka $F \in BV^*(A)$.

Bukti: Diketahui $F \in AC^*(A)$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (misalkan $\varepsilon = 1$) terdapat bilangan $\delta > 0$ dan jika $\{(c_i, d_i)\}$ barisan selang terbuka di dalam $[a, b]$ dengan $c_i, d_i \in A$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} (d_i - c_i) < \delta$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [c_i, d_i]) < \varepsilon = 1$$

Pilih $M = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [c_i, d_i]), 1 : c_i, d_i \in A \right\}$.

Maka ada bilangan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap barisan interval buka $\{(a_i, b_i)\}$ yang saling asing dengan $a_i, b_i \in A$ maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [a_i, b_i]) \leq M.$$

Jadi, $F \in BV^*(A)$. $\square$

Teorema 6.3.19 Jika $F \in BV^*(A)$ maka $F \in BV(A)$.

Bukti: Diketahui $F \in BV^*(A)$ berarti ada bilangan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap barisan interval buka $\{(a_i, b_i)\}$ yang saling asing dengan $a_i, b_i \in A$ maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [a_i, b_i]) \leq M.$$

Hal ini berakibat

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|F(a_i, b_i)\|_X = \sum_{i=1}^{\infty} \|F(b_i) - F(a_i)\|_X$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup \left\{ \|F(x) - F(y)\|_X : x, y \in [a_i, b_i], i \geq 1 \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \omega(F; [a_i, b_i]) \\
 &\leq M.
 \end{aligned}$$

Jadi, ada bilangan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap barisan interval buka $\{(a_i, b_i)\}$ yang saling asing dengan $a_i, b_i \in A$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|F(a_i, b_i)\|_X \leq M.$$

Dengan kata lain $F \in BV(A)$. $\square$

Berikut ini dibahas generalisasi dari fungsi kontinu mutlak dan fungsi kontinu mutlak kuat, serta generalisasi dari fungsi bervariasi terbatas dan bervariasi terbatas kuat kemudian kaitan antar masing-masing.

Definisi 6.3.20 Diberikan X ruang Banach dan fungsi $F : [a, b] \rightarrow X$. Fungsi F dikatakan kontinu mutlak terintlak (Generalized absolutely continuous) pada $A \subset [a, b]$, ditulis $F \in ACG(A)$, jika ada barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in AC(a_n), \forall n.$$

Definisi 6.3.21 Diberikan X ruang Banach dan fungsi $F : [a, b] \rightarrow X$. Fungsi F dikatakan kontinu mutlak kuat terintlak (Generalized stricly

absolutely continuous) pada $A \subset [a, b]$, ditulis $F \in ACG^*(A)$, jika ada barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in AC^*(a_n), \forall n.$$

Teorema 6.3.22 Jika $F \in AC(A)$ maka $F \in ACG(A)$.

Bukti: Diketahui $F \in AC(A)$. Dibentuk barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n. \text{ Karena } F \in AC(A) \text{ dan } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ maka } F \in AC\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n\right). \text{ Hal}$$

ini berakibat $F \in AC(a_n), \forall n$.

Jadi ada barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in AC(a_n), \forall n.$$

Jadi, $F \in ACG(A)$. $\square$

Teorema 6.3.23 Jika $F \in AC^*(A)$ maka $F \in ACG^*(A)$.

Bukti: Diketahui $F \in AC^*(A)$. Dibentuk barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n. \text{ Karena } F \in AC^*(A) \text{ dan } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ maka } F \in AC^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n\right).$$

Hal ini berakibat $F \in AC^*(a_n), \forall n$.

Jadi ada barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in AC^*(a_n), \forall n.$$

Jadi, $F \in ACG^*(A)$. $\square$

Teorema 6.3.24 Jika $F \in ACG^*(A)$ maka $F \in ACG(A)$.

Bukti: Karena $F \in ACG^*(A)$ maka ada barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in AC^*(a_n), \forall n.$$

Menurut Teorema jika $F \in AC^*(a_n), \forall n$ maka $F \in AC(a_n), \forall n$.

Jadi ada barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in AC(a_n), \forall n.$$

Hal ini berarti $F \in ACG(A)$. $\square$

Definisi 6.3.25 Diberikan X ruang Banach dan fungsi $F:[a,b] \rightarrow X$.

Fungsi F dikatakan bervariasi terbatas terintlak (Generalized bounded variation function) pada $A \subset [a,b]$, ditulis $F \in BVG(A)$, jika ada barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in BV(a_n), \forall n.$$

Definisi 6.3.26 Diberikan X ruang Banach dan fungsi $F:[a,b] \rightarrow X$.

Fungsi F dikatakan bervariasi terbatas kuat terintlak (Generalized stricly bounded variation function) pada $A \subset [a,b]$, ditulis $F \in BVG^*(A)$, jika ada barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in BV^*(a_n), \forall n.$$

Teorema 6.3.27 Jika $F \in BV(A)$ maka $F \in BVG(A)$.

Bukti: Diketahui $F \in BV(A)$, berarti ada bilangan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap barisan interval buka $\{(a_i, b_i)\}$ yang saling asing dengan $a_i, b_i \in A$ maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|F(a_i, b_i)\|_X = \sum_{i=1}^{\infty} \|F(b_i) - F(a_i)\|_X \leq M.$$

Dibentuk barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$. Karena $F \in BV(A)$

dan $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$ maka $F \in BV\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n\right)$. Hal ini berakibat $F \in BV(a_n), \forall n$.

Jadi ada barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in BV(a_n), \forall n.$$

Jadi, $F \in BVG(A)$. $\square$

Teorema 6.3.28 Jika $F \in BV^*(A)$ maka $F \in BVG^*(A)$.

Bukti: Diketahui $F \in BV^*(A)$. Dibentuk barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n. \text{ Karena } F \in BV^*(A) \text{ dan } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ maka } F \in BV^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n\right).$$

Hal ini berakibat $F \in BV^*(a_n), \forall n$.

Jadi ada barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in BV^*(a_n), \forall n.$$

Jadi, $F \in BVG^*(A)$. $\square$

Teorema 6.3.29 Jika $F \in BVG^*(A)$ maka $F \in BVG(A)$.

Bukti: Karena $F \in BVG^*(A)$ maka ada barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in BV^*(a_n), \forall n.$$

Menurut Teorema, jika $F \in BV^*(a_n), \forall n$ maka $F \in BV(a_n), \forall n$.

Jadi ada barisan himpunan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in BV(a_n), \forall n.$$

Dengan kata lain $F \in BVG(A)$. $\square$

Teorema 6.3.30 Jika $f : [a, b] \rightarrow X$ terintegral Dunford pada $[a, b]$ dengan primitif F maka $F \in BVG[a, b]$.

Bukti: Diketahui $f \in D_L[a, b]$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ dan jika $A \subset [a, b]$ interval tertutup dan $\mathcal{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ partisi tag δ -fine pada A berlaku

$$\left| \sum_{i=1}^n x^* (f(x_i) \alpha(D_i) - F(D_i)) \right| < \varepsilon$$

atau

$$\left| \sum_{i=1}^n x^* f(x_i) \alpha(D_i) - x^* F(A) \right| < \varepsilon .$$

Misalkan diambil $\varepsilon = 1$ dan $\delta(x) \leq 1$ serta $\|x^*\|_X \leq 1$.

Dibentuk himpunan A_{ni} adalah himpunan semua

$x \in [a + \frac{i-1}{n}, a + \frac{i}{n}] \cap [a, b]$ sedemikian hingga $\|f(x)\|_X \leq n$ dan

$$\frac{1}{n} < \delta(x) \leq \frac{1}{n-1}.$$

Diperoleh bahwa $[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$.

Diambil sebarang himpunan interval tertutup $\{[a_k, b_k]\}$ yang tidak saling tumpang tindih dengan $a_k, b_k \in A_{ni}$ untuk setiap k .

Diperoleh $\{(a_k, [a_k, b_k])\}$ adalah partisi Perron δ -fine K -sistem di dalam $[a, b]$.

Sehingga

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) \right\| &\leq \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) \right\|_X \\ &\leq \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) - f(a_k)(b_k - a_k) + f(a_k)(b_k - a_k) \right\|_X \\ &\leq \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) - f(a_k)(b_k - a_k) \right\|_X + \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)(b_k - a_k) \right\|_X \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x^* F([a_k, b_k]) - x^* f(a_k)(b_k - a_k) \right\| + \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)(b_k - a_k) \right\|_X \end{aligned}$$

$$< 1 + n(b-a).$$

Hal ini menunjukkan bahwa $F \in BV(A_{ni})$.

Jadi ada barisan himpunan $\{A_{ni}\}$ sehingga $[a, b] = \bigcup_{i=1, n=2}^{\infty} A_{ni}$ dan $F \in BV(A_{ni})$

.

Jadi $F \in BVG[a, b]$. $\square$

Akibat 6.3.31 Jika $f \in D_L[a, b]$ dengan primitif F maka ada barisan

himpunan $\{A_{ni}\}$ sehingga $[a, b] = \bigcup_{i=1, n=2}^{\infty} A_{ni}$ dan $F \in BV(A_{ni}), \forall n, i$. $\square$

Teorema 6.3.32 Jika $f \in D_L[a, b]$ dengan primitif F maka $F \in BV[a, b]$.

Bukti: Karena $f \in D[a, b]$ dengan primitif F maka menurut Akibat 6.3.31

ada barisan himpunan $\{A_{ni}\}$ sehingga $[a, b] = \bigcup_{i=1, n=2}^{\infty} A_{ni}$ dan

$F \in BV(A_{ni}), \forall n, i$. Karena $F \in BV(A_{ni}), \forall n, i$ dan $[a, b] = \bigcup_{i=1, n=2}^{\infty} A_{ni}$ maka

berakibat $F \in BV[a, b]$. $\square$

Teorema 6.3.33 Jika $f \in D_L[a, b]$ dengan primitif F maka $F \in ACG[a, b]$.

Bukti: Diketahui $f \in D[a, b]$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ dan jika $A \subset [a, b]$ interval

tertutup dan $\mathcal{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ partisi tag δ -fine pada A berlaku

$$\left| \sum_{i=1}^n x^* (f(x_i) \alpha(D_i) - F(D_i)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

atau

$$\left| \sum_{i=1}^n x^* f(x_i) \alpha(D_i) - x^* F(A) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Misalkan diambil $\delta(x) \leq 1$ dan $\|x^*\|_x \leq 1$.

Dibentuk himpunan A_{ni} adalah himpunan semua

$x \in [a + \frac{i-1}{n}, a + \frac{i}{n}] \cap [a, b]$ sedemikian hingga $\|f(x)\|_x \leq n$ dan

$$\frac{1}{n} < \delta(x) \leq \frac{1}{n-1}.$$

Diperoleh bahwa $[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$.

Diambil sebarang himpunan interval tertutup $\{[a_k, b_k]\}$ yang tidak saling tumpang tindih dengan $a_k, b_k \in A_{ni}$ untuk setiap k .

Diperoleh $\{(a_k, [a_k, b_k])\}$ adalah partisi Perron δ -fine K -sistem di dalam $[a, b]$, yang berakibat bahwa $\{(a_k, [a_k, b_k])\}$ merupakan partisi tag δ -fine K -system di dalam $[a, b]$.

Sehingga

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) \right\| \leq \|x^*\|_x \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) \right\|_x$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) - f(a_k)(b_k - a_k) + f(a_k)(b_k - a_k) \right\|_X \\
&\leq \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) - f(a_k)(b_k - a_k) \right\|_X + \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)(b_k - a_k) \right\|_X \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} x^* F([a_k, b_k]) - x^* f(a_k)(b_k - a_k) \right| + \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)(b_k - a_k) \right\|_X \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + n \sum_k (b_k - a_k).
\end{aligned}$$

Pilih $\eta \leq \frac{\varepsilon}{2n(b-a)}$ dan $\sum_k (b_k - a_k) < \eta$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) \right\| &< \frac{\varepsilon}{2} + n(b-a)\eta \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ini berarti $F \in AC(A_{ni})$.

Jadi ada barisan $\{A_{ni}\}$ sehingga $[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$ dan $F \in AC(A_{ni}), \forall n, i$.

Dengan kata lain $F \in ACG[a, b]$. $\square$

Akibat 6.3.34 Jika $f \in D_L[a, b]$ dengan primitif F maka ada barisan

himpunan $\{A_{ni}\}$ sehingga $[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$ dan $F \in AC(A_{ni}), \forall n, i$. $\square$

Teorema 6.3.35 Jika $f \in D_L[a, b]$ dengan primitif F maka $F \in AC[a, b]$.

Bukti: Karena $f \in D_L[a, b]$ dengan primitif F maka berdasarkan Akibat

6.3.34 ada barisan himpunan $\{A_{n_i}\}$ sehingga $[a, b] = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_{n_i}$ dan

$$F \in AC(A_{n_i}), \forall n, i. \text{ Jadi } F \in AC[a, b]. \quad \square$$

Selanjutnya dikaji fungsi kontinu, kontinu lemah, dan hubungannya.

Definisi 6.3.36 Fungsi $F : [a, b] \rightarrow X$ dikatakan kontinu (kontinu kuat) di $c \in [a, b]$ jika

$$\lim_{x \rightarrow c} \|F(x) - F(c)\|_X = 0.$$

Sedangkan fungsi $F : [a, b] \rightarrow X$ dikatakan kontinu lemah di $c \in [a, b]$ jika

$$\lim_{x \rightarrow c} |x^* F(x) - x^* F(c)| = 0,$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jika fungsi $F : [a, b] \rightarrow X$ kontinu di setiap titik $c \in [a, b]$, maka fungsi F dikatakan kontinu (kontinu lemah) pada $[a, b]$.

Jika fungsi $F : [a, b] \rightarrow X$ kontinu lemah di setiap titik $c \in [a, b]$, maka fungsi F dikatakan kontinu lemah pada $[a, b]$.

Teorema 6.3.37 Jika fungsi F kontinu di $c \in [a, b]$, maka fungsi F kontinu lemah di $c \in [a, b]$.

Bukti: Diketahui fungsi F kontinu di $c \in [a, b]$, berarti

$$\lim_{x \rightarrow c} \|F(x) - F(c)\|_X = 0.$$

Untuk setiap $x^* \in X^*$, diperoleh

$$\begin{aligned}
& \|x^*\| \lim_{x \rightarrow c} \|F(x) - F(c)\|_X = 0 \\
\Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow c} \|x^*\| \|F(x) - F(c)\|_X = 0 \\
\Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow c} |x^* F(x) - x^* F(c)| = 0.
\end{aligned}$$

Hal ini berarti fungsi F kontinu lemah di $c \in [a, b]$. $\square$

Teorema 6.3.37 sebaliknya belum tentu berlaku, artinya setiap fungsi yang kontinu lemah belum tentu kontinu. Seperti pada contoh berikut.

Contoh 6.3.38 Didefinisikan fungsi $F : [0, 1] \rightarrow L_2$ oleh

$$F(x) = \begin{cases} e_n, & x = \frac{1}{n} \\ 0, & x \neq \frac{1}{n}, x \in [0, 1], n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Fungsi F kontinu lemah di $0 \in [0, 1]$, yaitu untuk setiap $x^* \in X^*$ berlaku

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x^* F(x) - x^* F(0)| = 0.$$

Akan tetapi fungsi F tidak kontinu di $0 \in [0, 1]$, karena $\left\| F\left(\frac{1}{n}\right) \right\|_{L_2} = 1$,

sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\| F\left(\frac{1}{n}\right) - F(0) \right\|_{L_2} = 1 \neq 0.$$

Akibat Teorema 6.3.8 berdasarkan Teorema 6.3.37 sebagai berikut.

Akibat 6.3.39 Jika $f \in D_L[a, b]$ dengan fungsi primitif F maka F kontinu lemah pada $[a, b]$. $\square$

BAB 7

Kekonvergenan dan Perluasan Harnack Integral Dunford

Bab ini membahas syarat cukup agar limit barisan nilai integral suatu fungsi terintegral Dunford sama dengan limit barisan fungsi tersebut. Oleh karena itu, diperlukan beberapa pengertian terkait kekonvergenan barisan. Kemudian dibahas perluasan Harnack dan Sifat Cauchy dari integral Dunford.

7.1 Kekonvergenan Integral Dunford

Berikut ini beberapa konsep kekonvergenan yang mendasari dalam pembahasan teorema kekonvergenan.

Definisi 7.1.1 Diberikan X ruang Banach, interval tertutup $[a, b] \subset \mathbb{R}$, dan fungsi $f_n : [a, b] \rightarrow X$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen ke fungsi f di $x \in [a, b]$ jika barisan $\{f_n(x)\}$ konvergen ke $f(x)$, yaitu ada $f(x) \in X$ dan untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku

$$\|f_n(x) - f(x)\|_X < \varepsilon.$$

Jadi $\{f_n\}$ konvergen di $x \in [a, b]$ sama saja $\{f_n(x)\}$ konvergen.

Jika barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen di setiap $x \in [a, b]$ maka $\{f_n\}$ dikatakan konvergen pada $[a, b]$.

Definisi 7.1.2 Diberikan X ruang Banach, interval tertutup $[a, b] \subset \mathbb{R}$, dan fungsi $f_n : [a, b] \rightarrow X$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen lemah ke fungsi f di titik $x \in [a, b]$ jika barisan vektor $\{f_n(x)\}$ konvergen lemah ke $f(x) \in X$, yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat bilangan asli $n_0 = n_0(\varepsilon, x^*, x)$ sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku

$$|x^* f_n(x) - x^* f(x)| < \varepsilon.$$

- (ii) Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen lemah ke fungsi f pada $[a, b]$ jika untuk setiap $x \in [a, b]$ dan setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$ terdapat bilangan asli $n_0 = n_0(\varepsilon, x, x^*)$ sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku

$$|x^* f_n(x) - x^* f(x)| < \varepsilon.$$

- (iii) Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen lemah seragam ke fungsi f pada $[a, b]$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku

$$|x^* f_n(x) - x^* f(x)| < \varepsilon$$

untuk setiap $x \in [a, b]$ dan $x^* \in X^*$.

Definisi 7.1.3 Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan naik monoton lemah pada $[a, b]$ jika untuk setiap $x^* \in X^*$ barisan $\{x^* f_n\}$ naik monoton, yaitu jika berlaku $x^* f_n(x) \leq x^* f_{n+1}(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, $x^* \in X^*$, dan $n \in \mathbb{N}$. Sedangkan barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan turun monoton lemah pada

$[a, b]$ jika untuk setiap $x^* \in X^*$ barisan $\{x^* f_n\}$ turun monoton, yaitu jika berlaku $x^* f_n(x) \geq x^* f_{n+1}(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, $x^* \in X^*$, dan $n \in N$.

Barisan naik monoton lemah atau turun monoton lemah disebut barisan monoton lemah.

Selanjutnya diberikan X ruang Banach, interval tertutup $[a, b] \subset R$, dan fungsi $f, f_n : [a, b] \rightarrow X$ untuk setiap $n \in N$. Jika fungsi f_n terintegral Dunford pada $[a, b]$ untuk setiap bilangan asli n dan barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f pada interval tertutup $A \subset [a, b]$, akan ditunjukkan beberapa kondisi yang menyebabkan f terintegral Dunford pada $[a, b]$ dan

$$x_{(f, A)}^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}.$$

Berikut ini adalah teorema-teorema kekonvergenan pada integral Dunford.

Teorema 7.1.4 (Teorema Kekonvergenan Seragam) Diberikan X ruang Banach, interval tertutup $[a, b] \subset R$, fungsi $f, f_n : [a, b] \rightarrow X$ dan $f_n \in D_L[a, b]$ untuk setiap bilangan asli n . Jika barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah seragam ke fungsi f pada interval tertutup $A \subset [a, b]$ maka $f \in D_L[a, b]$ dan

$$x_{(f, A)}^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}.$$

Bukti: Diberikan $A \subset [a, b]$ sebarang interval tertutup.

Diketahui bahwa barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah seragam ke fungsi f pada interval tertutup $A \subset [a, b]$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan Asli $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku

$$\left| x^* f_n(x) - x^* f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+1} \quad (7.1)$$

untuk setiap $x \in [a, b]$ dan $x^* \in X^*$.

Fungsi $f_n \in D_L[a, b]$ untuk setiap bilangan asli n , berarti untuk $\varepsilon > 0$ tersebut di atas, setiap $x^* \in X^*$, dan setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ fungsi $x^* f_n$ terintegral Lebesgue ekuivalen terintegral McShane pada A . Jadi terdapat fungsi positif δ_n pada $[a, b]$ sehingga untuk $A \subset [a, b]$ di atas, $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ dan $\mathcal{P} = \{(D, x)\}$ masing-masing sebarang partisi McShane δ_n -fine pada A berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f_n(x) \alpha(D) - x_{(f_n, A)}^{**}(x^*) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

dan

$$\left| \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f_n(x) \alpha(D) - \mathcal{P} \sum_{x \in A} x^* f_n(x) \alpha(D) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (7.2)$$

Berdasarkan (7.1) dan (7.2), Jika $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ dan $\mathcal{P} = \{(D, x)\}$ sebarang partisi McShane δ_n -fine pada A diperoleh

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f(x) \alpha(D) - \mathcal{P} \sum_{x \in A} x^* f(x) \alpha(D) \right| \\
 & \leq \left| \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f(x) \alpha(D) - \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f_n(x) \alpha(D) \right| \\
 & \quad + \left| \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f_n(x) \alpha(D) - \mathcal{P} \sum_{x \in A} x^* f_n(x) \alpha(D) \right| \\
 & \quad + \left| \mathcal{P} \sum_{x \in A} x^* f_n(x) \alpha(D) - \mathcal{P} \sum_{x \in A} x^* f(x) \alpha(D) \right| \\
 & < \frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+1} \mathcal{D} \sum_{x \in A} \alpha(D) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+1} \mathcal{P} \sum_{x \in A} \alpha(D) \\
 & = \frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+1} \alpha(A) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+1} \alpha(A) \\
 & < \varepsilon .
 \end{aligned}$$

Jadi fungsi $x^* f$ terintegral McShane (Lebesgue) pada A dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ di atas terdapat vektor $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (L) \int_A x^* f .$$

Dengan kata lain $f \in D_L[a, b]$.

Selanjutnya karena $f \in D_L[a, b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ dan sebarang interval tertutup $A \subset [a, b]$ di atas, fungsi $x^* f$ terintegral Lebesgue (McShane) pada A . Berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ tersebut di atas terdapat fungsi positif δ' pada A sehingga jika $\mathcal{Q} = \{(D, x)\}$ partisi McShane δ' -fine pada A berlaku

$$\left| \mathcal{Q} \sum_{x \in A} x^* f(x) \alpha(D) - x_{(f, A)}^{**}(x^*) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dipilih $\delta^*(x) = \min \{\delta_n(x), \delta'(x)\}$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

Diperoleh fungsi positif δ^* pada $[a, b]$. Jadi untuk interval tertutup $A \subset [a, b]$ dan jika $\mathcal{D}^* = \{(D, x)\}$ partisi McShane δ^* -fine pada $[a, b]$ didapat

$$\begin{aligned} \left| x_{(f_n, A)}^{**}(x^*) - x_{(f, A)}^{**}(x^*) \right| &\leq \left| x_{(f_n, A)}^{**}(x^*) - \mathcal{D}^* \sum_{x \in A} x^* f_n(x) \alpha(D) \right| \\ &+ \left| \mathcal{D}^* \sum_{x \in A} x^* f_n(x) \alpha(D) - \mathcal{D}^* \sum_{x \in A} x^* f(x) \alpha(D) \right| \\ &+ \left| \mathcal{D}^* \sum_{x \in A} x^* f(x) \alpha(D) - x_{(f, A)}^{**}(x^*) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+1} \mathcal{D}^* \sum_{x \in A} \alpha(D) + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4\alpha(A)+1} \alpha(A) + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

$$< \varepsilon .$$

Dengan kata lain

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n,A)}^{**}(x^*),$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jadi,

$$x_{(f,A)}^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n,A)}^{**}. \quad \square$$

Teorema 7.1.5 (Teorema Kekonvergenan Monoton) Diberikan X ruang Banach, interval tertutup $[a,b] \subset \mathbb{R}$, fungsi $f, f_n : [a,b] \rightarrow X$ dan $f_n \in D_L[a,b]$ untuk setiap bilangan asli n . Jika

- (i) barisan fungsi $\{f_n\}$ monoton lemah pada A ,
- (ii) barisan $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f pada A , dan
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n,A)}^{**}(x^*)$ untuk setiap $x^* \in X^*$ adadanberhingga,

maka $f \in D_L[a,b]$ dan

$$x_{(f,A)}^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n,A)}^{**}$$

untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$.

Bukti: Dibuktikan untuk barisan fungsi $\{f_n\}$ yang naik monoton lemah pada A . Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan sebarang interval tertutup $A \subset [a,b]$. Barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f pada

$A \subset [a, b]$, berarti untuk bilangan $\varepsilon > 0$ di atas dan untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $x \in [a, b]$, terdapat bilangan asli $m_0 = m_0(\varepsilon, x^*, x)$ sehingga jika $n \geq m_0$ berlaku

$$|x^* f_n(x) - x^* f(x)| < \frac{\varepsilon}{4\alpha(A) + 4}.$$

Fungsi $f_n \in D_L[a, b]$ untuk setiap bilangan asli n , berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ dan interval tertutup $A \subset [a, b]$ fungsi $x^* f_n$ terintegral Lebesgue (McShane) pada A , yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ tersebut di atas terdapat fungsi positif δ_n pada $[a, b]$ sehingga jika $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ sebarang partisi McShane δ_n -fine pada A berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f_n(x) \alpha(D) - x_{(f_n, A)}^{**}(x^*) \right| = \left| \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f_n(x) \alpha(D) - (H) \int_A x^* f_n \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Karena barisan fungsi $\{f_n\}$ naik monoton lemah pada A maka untuk setiap $x^* \in X^*$ barisan $\{x^* f_n\}$ naik monoton pada A , yaitu $x^* f_n(x) \leq x^* f_{n+1}(x)$ untuk setiap $x \in A \subset [a, b]$. Karena $f_n \in D[a, b]$, maka untuk setiap $x^* \in X^*$ dan interval tertutup $A \subset [a, b]$ fungsi $x^* f_n$ terintegral Lebesgue pada A sehingga

$$x_{(f_n, A)}^{**}(x^*) = (L) \int_A x^* f_n.$$

Akibatnya

$$x_{(f_n, A)}^{**}(x^*) = (L) \int_A x^* f_n \leq (L) \int_A x^* f_{n+1} = x_{(f_{n+1}, A)}^{**}(x^*).$$

Hal ini berarti barisan $\left\{ (L) \int_A x^* f_n \right\}$ naik monoton pada A .

Karena barisan $\left\{ (L) \int_A x^* f_n \right\}$ naik monoton dan untuk setiap $x^* \in X^*$ dan interval tertutup $A \subset [a, b]$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}(x^*)$ untuk setiap $x^* \in X^*$ ada dan

berhingga, maka $\left\{ (L) \int_A x^* f_n \right\}$ konvergen, katakan ke L_0 sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_A x^* f_n = L_0.$$

Jadi untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli $n_0 = n_0(\varepsilon, x^*)$ sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku

$$\left| (L) \int_A x^* f_n - L_0 \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dipilih $m^*(\varepsilon, x^*, x) = \max \{ n_0(\varepsilon, x^*), m_0(\varepsilon, x^*, x) \}$

Dibentuk fungsi positif δ pada $[a, b]$ dengan rumus

$$\delta(x) = \delta_{m^*(\varepsilon, x^*, x)}(x) \text{ untuk setiap } x \in [a, b] \text{ dan } x^* \in X^*.$$

Dengan demikian untuk interval tertutup $A \subset [a, b]$ dan jika $\mathcal{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ partisi McShane δ -fine pada A berlaku

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f(x) \alpha(D) - L_0 \right| \\
 & \leq \left| \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f(x) \alpha(D) - \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f_{m^*}(x) \alpha(D) \right| \\
 & \quad + \left| \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f_{m^*}(x) \alpha(D) - (H) \int_A x^* f_{m^*} \right| \\
 & \quad + \left| (H) \int_A x^* f_{m^*} - L_0 \right| \\
 & \leq \mathcal{D} \sum_{x \in A} |x^* f(x) - x^* f_{m^*}(x)| \alpha(D) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\
 & < \frac{\varepsilon}{4\alpha(A) + 4} \mathcal{D} \sum_{x \in A} \alpha(D) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\
 & = \frac{\varepsilon}{4\alpha(A) + 4} \alpha(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\
 & < \varepsilon .
 \end{aligned}$$

Hal ini berarti $x^* f$ terintegral McShane (Lebesgue) pada A dan terdapat $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (L) \int_A x^* f .$$

Jadi $f \in D_L[a, b]$ dan

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = L_0 \text{ atau } x_{(f,A)}^{**}(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n,A)}^{**}(x^*)$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Karena berlaku untuk setiap $x^* \in X^*$, maka

$$x_{(f,A)}^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n,A)}^{**}. \quad \square$$

Teorema 7.1.6 (Lemma Fatou) Diberikan X ruang Banach, interval tertutup $[a, b] \subset \mathbb{R}$, fungsi $f, f_n : [a, b] \rightarrow X$ dan $f_n \in D_L[a, b]$ untuk setiap bilangan asli n . Jika untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ barisan $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f pada A dan $x^* f_n(x) \geq 0$ hampir di mana-mana pada A untuk setiap n dan untuk setiap $x^* \in X^*$ maka $f \in D_L[a, b]$ dan

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n,A)}^{**}(x^*).$$

Bukti: Diambil sebarang interval tertutup $A \subset [a, b]$.

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $x^* \in X^*$ didefinisikan fungsi $g_n : A \subset [a, b] \rightarrow X$ oleh

$$x^* g_n(x) = \inf_{k \geq n} \{x^* f_k(x)\} \text{ untuk setiap } x \in A \subset [a, b].$$

Diperoleh bahwa barisan $\{x^* g_n\}$ naik monoton pada A untuk setiap $x^* \in X^*$, artinya bahwa barisan $\{g_n\}$ naik monoton lemah pada A .

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ diperoleh

$$x^* g_n(x) \leq x^* f_n(x)$$

untuk setiap $x \in A$. Karena $x^* f_n(x) \geq 0$ h.d pada A maka $x^* g_n(x) \geq 0$ h.d pada A .

Lebih lanjut untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ dan $x^* \in X^*$ diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_A x^* g_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_A x^* f_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(g_n, A)}^{**}(x^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}(x^*).$$

Karena barisan $\{x^* g_n\}$ naik monoton, dan barisan $\{x^* f_n\}$ konvergen ke fungsi $x^* f$ untuk setiap $x^* \in X^*$ maka barisan $\{x^* g_n\}$ konvergen ke $x^* f$ untuk setiap $x^* \in X^*$. Jadi barisan fungsi $\{x^* g_n\}$ konvergen ke fungsi $x^* f$ untuk setiap $x^* \in X^*$. Hal ini berarti barisan $\{g_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f . Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_A x^* g_n$ ada maka menurut Teorema

Kekonvergenan Monoton diperoleh $f \in D_L[a, b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ diperoleh

$$x_{(f, A)}^{**}(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(g_n, A)}^{**}(x^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}(x^*).$$

Jadi

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n,A)}^{**}(x^*)$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Dengan demikian,

$$x_{(f,A)}^{**} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n,A)}^{**}. \quad \square$$

Akibat dari Lemma Fatou ini diperoleh Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue yang disajikan sebagai berikut.

Teorema 7.1.7 (Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue)
Diketahui fungsi $f, g, f_n : [a, b] \rightarrow X$ dan $g, f_n \in D_L[a, b]$ untuk setiap bilangan asli n . Jika

(i) *barisan fungsi (f_n) konvergen lemah ke fungsi f pada $[a, b]$,*

(ii) *$|x^* f_n(x)| \leq x^* g(x)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $x^* \in X^*$, dan $x \in [a, b]$*

maka $f \in D_L[a, b]$ dan

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n,A)}^{**}(x^*)$$

untuk setiap $A \subset [a, b]$ interval tertutup.

Bukti: Diberikan $A \subset [a, b]$ sebarang interval tertutup.

Barisan fungsi (f_n) konvergen lemah ke fungsi f pada $[a, b]$ berarti barisan fungsi (f_n) konvergen lemah ke fungsi f di setiap $x \in [a, b]$, yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x \in [a, b]$, dan $x^* \in X^*$ terdapat bilangan asli $n_0 = n_0(\varepsilon, x^*, x)$ sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku

$$|x^* f_n(x) - x^* f(x)| < \varepsilon$$

atau

$$x^* f_n(x) - \varepsilon < x^* f(x) < x^* f_n(x) + \varepsilon.$$

Diketahui bahwa

$$|x^* f_n(x)| \leq x^* g(x)$$

Diperoleh

$$-x^* g(x) \leq x^* f_n(x) \leq x^* g(x)$$

Akibatnya

$$x^* g(x) - x^* f_n(x) = x^* (g - f_n)(x) \geq 0.$$

Karena barisan fungsi $(x^* f_n)$ konvergen ke fungsi $x^* f$ pada $[a, b]$ untuk setiap $x^* \in X^*$ maka barisan fungsi $(x^* (g - f_n))$ konvergen ke fungsi $x^* (g - f)$ pada $[a, b]$, artinya barisan fungsi $(g - f_n)$ konvergen lemah ke fungsi $g - f$ pada $[a, b]$. Akibatnya barisan $\left((L) \int_A x^* (g - f_n) \right)$ terbatas untuk setiap n dan $x^* \in X^*$.

Dengan demikian menurut Lemma Fatou diperoleh $g - f \in D[a, b]$ dan

$$x_{(g-f, A)}^{**}(x^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{(g-f_n, A)}^{**}(x^*).$$

Karena $-x^*g(x) \leq x^*f(x) \leq x^*g(x)$ untuk setiap $x \in E \subset [a, b]$ dan $x^* \in X^*$ dan karena $g \in D[a, b]$ maka $f \in D_L[a, b]$ dan

$$\begin{aligned}
 0 &\leq x_{(g,A)}^{**}(x^*) - x_{(f,A)}^{**}(x^*) = x_{(g-f,A)}^{**}(x^*) \\
 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{(g-f_n,A)}^{**}(x^*) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ x_{(g,A)}^{**}(x^*) - x_{(f_n,A)}^{**}(x^*) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ (L) \int_A x^*g + (L) \int_A x^*(-f_n) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf (L) \int_A x^*g + \lim_{n \rightarrow \infty} \inf (L) \int_A x^*(-f_n) \\
 &= (L) \int_A x^*g - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (L) \int_A x^*f_n \\
 &= x_{(g,A)}^{**}(x^*) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_{(f_n,A)}^{**}(x^*)
 \end{aligned}$$

Didapat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_{(f_n,A)}^{**}(x^*) \leq x_{(f,A)}^{**}(x^*)$$

Selanjutnya

$$x^*g(x) + x^*f_n(x) = x^*(g + f_n)(x) \geq 0.$$

Karena barisan fungsi (x^*f_n) konvergen ke fungsi x^*f pada $[a, b]$ untuk setiap $x^* \in X^*$ maka barisan fungsi $(x^*(g + f_n))$ konvergen ke fungsi

$x^*(g + f)$ pada $[a, b]$. Oleh karena itu barisan $\left((L) \int_A x^*(g + f_n) \right)$ terbatas

untuk setiap n dan $x^* \in X^*$.

Menurut Lemma Fatou diperoleh $g + f \in D[a, b]$ dan

$$x_{(g+f, A)}^{**}(x^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{(g+f_n, A)}^{**}(x^*).$$

sehingga

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{(g, A)}^{**}(x^*) + x_{(f, A)}^{**}(x^*) = x_{(g+f, A)}^{**}(x^*) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{(g+f_n, A)}^{**}(x^*) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ x_{(g, A)}^{**}(x^*) + x_{(f_n, A)}^{**}(x^*) \right\} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ (L) \int_A x^* g + (L) \int_A x^* f_n \right\} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (L) \int_A x^* g + \liminf_{n \rightarrow \infty} (L) \int_A x^* f_n \\ &= (L) \int_A x^* g + \liminf_{n \rightarrow \infty} (L) \int_A x^* f_n \\ &= x_{(g, A)}^{**}(x^*) + \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}(x^*) \end{aligned}$$

Didapat

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}(x^*) \geq x_{(f, A)}^{**}(x^*)$$

Dengan demikian diperoleh

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}(x^*) \leq x_{(f, A)}^{**}(x^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}(x^*) \Leftrightarrow$$

$$x_{(f, A)}^{**}(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}(x^*). \quad \square$$

Teorema 7.1.8 (Teorema Kekonvergenan Terbatas) Diberikan X ruang Banach, interval tertutup $[a, b] \subset \mathbb{R}$, fungsi $f, f_n : [a, b] \rightarrow X$, dan $f_n \in D_L[a, b]$ untuk setiap bilangan asli n . Jika untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f pada A dan ada bilangan $M > 0$ sehingga $|x^* f_n(x)| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $x^* \in X^*$, dan $x \in A$ maka $f \in D_L[a, b]$ dan

$$x_{(f, A)}^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}.$$

Bukti: Diberikan sebarang interval tertutup $A \subset [a, b]$.

Diambil $x^* g(x) = M > 0$, $M \in \mathbb{R}$ untuk setiap $x \in A$. Karena barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f pada A dan $|x^* f_n(x)| \leq x^* g(x) = M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $x^* \in X^*$, dan $x \in A$ maka berdasarkan Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue diperoleh $f \in D_L[a, b]$ dan

$$x_{(f, A)}^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n, A)}^{**}.$$

Jadi $f \in D_L[a, b]$ dan $x_{(f,A)}^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(f_n,A)}^{**}$. $\square$

7.2 Perluasan Harnack dan Sifat Cauchy Integral Dunford

Berikut ini dibahas perluasan Harnack dan Sifat Cauchy dari integral Dunford pada $[a, b]$.

Teorema 7.2.1 (Ekstensi Harnack) Diberikan fungsi $f : [a, b] \rightarrow X$.

Himpunan B tertutup di dalam $[a, b]$ dan $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ barisan himpunan sederhana yang tidak saling tumpang tindih sehingga $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [a, b] - B$.

Jika $f \in D(B)$ dan $f \in D(A_i)$ untuk setiap i dengan

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{A_i} x^* f \right| < \infty,$$

untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $A \in [a, b]$, maka $f \in D[a, b]$ dan

$$(D) \int_A f = (D) \int_{[a,b]} f \chi_B + \sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{A_i} f.$$

Bukti: Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena $f \in D(B)$ maka f terintegral McShane pada B , yaitu terdapat fungsi positif δ_0 pada B sehingga untuk setiap partisi tag (McShane) δ_0 -fine $\mathcal{M}_0 = \{(M, x)\}$ pada B berlaku

$$\left| (\mathcal{M}_0) \sum x^* f(x) \alpha(M) - (M) \int_B x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Karena $f \in D(A_i)$ maka untuk setiap i dan bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat fungsi positif δ_i pada A_i sehingga untuk setiap partisi tag δ_i -fine $\mathcal{M}_i = \{(M, x)\}$ pada A_i berlaku

$$\left| (\mathcal{M}_i) \sum x^* f(x) \alpha(M) - (M) \int_{A_i} x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Kemudian karena diketahui bahwa $\left| \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{A_i} x^* f \right| < \infty$, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli N sehingga untuk setiap $i > N$ berlaku

$$\left| \sum_{i>N} (L) \int_{A_i} x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dibentuk fungsi positif δ pada $[a, b]$, yaitu

$$\delta(x) = \begin{cases} \min \{ \delta_0(x), \delta_1(x), \dots, \delta_N(x) \}, & x \in B \cup \left(\bigcup_{i=1}^N A_i \right) \\ \min \{ \delta_0(x), \delta_{N+k}(x) \}, & x \in \bigcup_{i=N+k}^{\infty} A_i, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Oleh karena itu, untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ dan partisi tag δ -fine $\mathcal{M} = \{(M, x)\}$ pada A berlaku

$$\begin{aligned} & \left| (\mathcal{M}) \sum x^* f(x) \alpha(M) - \left((L) \int_B x^* f + \sum_{i>N} (L) \int_{A_i} x^* f \right) \right| \\ & \leq \left| (\mathcal{M}_0) \sum x^* f(x) \alpha(M) - (L) \int_{A_1} x^* f \right| + \end{aligned}$$

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} (\mathcal{M}_i) \sum x^* f(x) \alpha(M) - \sum_{i \leq N} (L) \int_{A_i} x^* f + \left| \sum_{i > N} (L) \int_{A_i} x^* f \right| \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Hal ini berarti $x^* f$ terintegral McShane pada $[a, b]$ yang ekuivalen $x^* f$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ terdapat vektor $x_{(f, A)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f, A)}^{**}(x^*) = (L) \int_B x^* f + \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{A_i} x^* f,$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Dengan kata lain, dan $f \in D[a, b]$ dan

$$x_{(f, A)}^{**}(x^*) = (L) \int_B x^* f + \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{A_i} x^* f,$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jadi, untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

$$x_{(f, A)}^{**} = (D) \int_{[a, b]} f \chi_B + \sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{A_i} f.$$

Hal ini ekuivalen dengan

$$(D) \int_A f = (D) \int_{[a, b]} f \chi_B + \sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{A_i} f. \quad \square$$

Teorema 7.2.2 (Sifat Cauchy) Diketahui A' dan A^0 berturut-turut menyatakan himpunan semua titik limit A dan himpunan semua titik dalam A . Jika $f \in D(A')$ untuk setiap $A' \subset A^0$ dan

$$\lim_{A' \rightarrow A} (D) \int_{A'} f = \sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{A_i} f$$

ada, maka $f \in D(A)$ dan

$$(D) \int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{A_i} f.$$

Bukti: Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$. Karena $f \in D(A')$ untuk setiap $A' \subset A^0$, maka terdapat fungsi positif δ_1 pada A' sehingga untuk setiap partisi tag δ_1 -fine $\mathcal{M}_1 = \{(M, x)\}$ pada A' berlaku

$$\left| (\mathcal{M}_1) \sum x^* f(x) \alpha(M) - (L) \int_{A'} x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Diketahui bahwa

$$\lim_{A' \rightarrow A} (D) \int_{A'} f = \sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{A_i} f$$

ada, maka berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ di atas terdapat bilangan $\eta > 0$ sehingga untuk $A' \subset A^0$ dengan $\alpha(A - A') < \eta$ berlaku

$$\left| (L) \int_{A'} x^* f - \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{A_i} x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ di atas dibentuk fungsi positif δ pada A , yaitu

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x)\}, & x \in A' \\ \min\left\{\delta_1(x), \frac{\varepsilon}{4|x^* f(x)|+1}\right\}, & x \notin A' \end{cases}.$$

Diambil sebarang partisi tag δ -fine $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 = \{(M, x)\}$ pada A dimana $\mathcal{M}_1$ partisi yang terkait $x \in A'$ dan $\mathcal{M}_2$ partisi yang terkait $x \notin A'$.

Diperoleh

$$\begin{aligned}
 & \left| (\mathcal{M}) \sum x^* f(x) \alpha(M) - \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{A_i} x^* f \right| = \\
 & \left| (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) \sum x^* f(x) \alpha(M) - \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{A_i} x^* f \right| \\
 & \leq \left| (\mathcal{M}_1) \sum_{x \in A'} x^* f(x) \alpha(M) - (L) \int_{A'} x^* f \right| + \\
 & \left| (L) \int_{A'} x^* f - \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{A_i} x^* f \right| + \left| (\mathcal{M}_2) \sum_{x \notin A'} x^* f(x) \alpha(M) \right| \\
 & \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + |x^* f(x)| (\mathcal{M}_2) \sum_{x \notin A'} \alpha(M) \\
 & \leq \frac{\varepsilon}{2} + |x^* f(x)| \frac{\varepsilon}{4|x^* f(x)| + 1} \\
 & < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Hal ini berarti $x^* f$ terintegral McShane pada A yang ekuivalen $x^* f$ terintegral Lebesgue pada A sehingga terdapat vektor $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ dan berlaku

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{A_i} x^* f.$$

Jadi, $f \in D(A)$ dan

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} (L) \int_{A_i} x^* f .$$

Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

$$(D) \int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} (D) \int_{A^i} f . \quad \square$$

BAB 8

Operator Integral Dunford

Dalam kalkulus diberikan himpunan semua bilangan real R dan fungsi bernilai real pada R . Jelas bahwa untuk sebarang fungsi tersebut memetakan setiap anggota dari R ke R . Di dalam analisis fungsional, digunakan ruang umum seperti ruang vector, ruang metrik dan ruang bernorma. Begitu juga untuk fungsinya memetakan pada ruang tersebut.

Pada bab ini dibahas operator linear terbatas yang merujuk pada operator kompak dan operator kompak lemah. Selanjutnya dikaji operator yang bekerja pada ruang fungsi yang terintegral Dunford.

8.1 Operator Linear Terbatas

Pada kasus ruang vector (atau disebut ruang linear), khususnya ruang bernorma, pemetaannya disebut operator. Jadi, operator adalah pemetaan dari ruang vector ke ruang vector. Yang menarik adalah operator yang mempertahankan dua operasi aljabar ruang vector.

Berikut ini dibicarakan operator linear, operator terbatas, operator adjoint, dan operator kompak, serta operator kompak lemah beserta sifat-sifatnya.

Definisi 8.1.1 *Operator linear T adalah operator sedemikian sehingga*

(i) *Domain $D(T)$ dari T adalah ruang vector dan range $R(T)$ berada pada ruang vector atas lapangan yang sama.*

(ii) *Untuk setiap $x, y \in D(T)$ dan scalar α ,*

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Notasi Tx dalam arti $T(x)$, notasi $D(T)$ menyatakan domain dari T dan $R(T)$ menyatakan range/ daerah hasil dari T . Sedangkan $N(T)$ menyatakan ruang null (kernel) dari T , yaitu untuk setiap $x \in D(T)$ berlaku $Tx = \theta$.

Ruang null $N(T)$ merupakan ruang linear, yaitu untuk setiap $x, y \in N(T)$ dan scalar $\alpha, \beta \in R$ berlaku

$$\begin{aligned}T(\alpha x + \beta y) &= \alpha T(x) + \beta T(y) \\&= \theta + \theta \\&= \theta.\end{aligned}$$

Hal ini berarti $\alpha x + \beta y \in N(T)$. Jadi, $N(T)$ ruang linear.

Misalkan $D(T) \subset X$ dan $R(T) \subset Y$ dengan X dan Y dua ruang linear atas lapangan R . Maka T adalah operator dari $D(T)$ ke $R(T)$, ditulis

$$T : D(T) \rightarrow R(T),$$

Atau dari $D(T)$ ke Y , ditulis

$$T : D(T) \rightarrow Y.$$

Jika $D(T)$ adalah seluruh ruang X , maka ditulis

$$T : X \rightarrow Y.$$

Jika $X = Y$, maka operator T disebut operator pada X .

Formula pada Definisi 8.1.1 menyatakan bahwa operator linear T adalah homomorphism dari ruang vector ke ruang vector lainnya, yaitu T mempertahankan dua operasi pada ruang vector.

Misalkan X, Y dua ruang vector. Operator identitas (*identity operator*)

$I : X \rightarrow X$ didefinisikan oleh

$$Ix = x,$$

untuk setiap $x \in X$.

Sedangkan operator nol (*zero operator*) $\theta : X \rightarrow Y$ didefinisikan oleh

$$\theta x = \theta,$$

untuk setiap $x \in X$.

Misalkan $C[a, b]$ menyatakan koleksi semua fungsi kontinu pada $[a, b]$.

Operator linear pada integral T pada $C[a, b]$ dapat didefinisikan oleh

$$Tx(t) = \int_a^t x(s) ds.$$

Definisi 8.1.2 Diberikan dua operator T_1 dan T_2 dari ruang vector X ke ruang vector Y atas lapangan yang sama R . Didefinisikan operasi

- (i) $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x), \forall x \in D(T_1) \cap D(T_2),$
- (ii) $(\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x), \forall x \in D(T_1)$ dan scalar α , dan
- (iii) $(T_1 T_2)(x) = T_1(T_2(x)), \forall x \in D(T_1 T_2) = \{x \in D(T_1) : T_1(x) \in D(T_2)\}.$

Definisi 8.1.3 Operator T dari ruang linear X ke ruang linear Y dikatakan injektif (*satu-satu*) jika untuk setiap $x, y \in X$ dengan $T(x) = T(y)$ berakibat $x = y$.

Ekuivalen, untuk setiap $x, y \in X$ jika $x \neq y$ berakibat $T(x) \neq T(y)$.

Operator linear T injektif jika dan hanya jika $T(x) = \theta$ berakibat $x = \theta$.

Sifat injektif ini menjamin adanya invers operator.

Jika $T : D(T) \rightarrow R(T)$ injektif, maka T^{-1} operator dari $R(T)$ ke $D(T)$, yaitu didefinisikan oleh

$$T^{-1}(y) = x \Leftrightarrow T(x) = y, \quad D(T^{-1}) = R(T).$$

Jelas bahwa,

$$T^{-1}(T(x)) = x, \quad \forall x \in D(T)$$

$$T(T^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in R(T).$$

Teorema 8.1.4 *Jika $T : X \rightarrow Y$ operator linear injektif, maka $T^{-1} : Y \rightarrow X$ merupakan operator linear.*

Bukti: Karena $T : X \rightarrow Y$ operator linear injektif maka $T(x) = \theta$ berakibat $x = \theta$. Misalkan $T(x_1) = T(x_2)$ maka

$$T(x_1 - x_2) = T(x_1) - T(x_2) = \theta - \theta = \theta,$$

sehingga $x_1 - x_2 = \theta$. Jadi, T^{-1} ada.

Jika T^{-1} ada, maka $T(x_1) = T(x_2)$ berakibat $x_1 = x_2$. Ambil $x_2 = \theta$, maka $T(x_1) = \theta$ berakibat $x_1 = \theta$.

Diambil sebarang $x_1, x_2 \in X$, diperoleh

$$T(x_1) = y_1 \text{ dan } T(x_2) = y_2.$$

Ekuivalen $T^{-1}(y_1) = x_1$ dan $T^{-1}(y_2) = x_2$.

Karena T linear, maka untuk sebarang scalar $\alpha, \beta \in R$ berlaku

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Karena $T^{-1}(y_1) = x_1$ dan $T^{-1}(y_2) = x_2$ maka

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}(y_1) + \beta T^{-1}(y_2).$$

Jadi, T^{-1} linear. $\square$

Lemma 8.1.5 Diketahui operator $T: X \rightarrow Y$ dan operator $S: Y \rightarrow Z$ operator bijektif dengan X, Y, Z ruang linear. Invers $(ST)^{-1}: Z \rightarrow X$ ada dan

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

Bukti: Karena operator $T: X \rightarrow Y$ dan operator $S: Y \rightarrow Z$ operator bijektif, maka operator $ST: X \rightarrow Z$ operator bijektif, yaitu injektif dan surjektif. Jadi, inversnya $(ST)^{-1}$ ada.

Oleh karena itu,

$$ST(ST)^{-1} = I,$$

dengan I adalah operator identitas.

Lebih lanjut dengan $S^{-1}S = I$ diperoleh

$$S^{-1}ST(ST)^{-1} = IT(ST)^{-1} = T(ST)^{-1} = S^{-1}I = S^{-1}.$$

Karena $T^{-1}T = I$ sehingga didapatkan

$$T^{-1}T(ST)^{-1} = I(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

Jadi, $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$. $\square$

Definisi 8.1.6 Diberikan X dan Y dua ruang bernorma. Operator linear $T: D(T) \rightarrow Y$ dikatakan terbatas jika ada bilangan real $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in D(T)$ berlaku

$$\|T(x)\| \leq M \|x\|.$$

Operator linear terbatas memetakan himpunan terbatas di $D(T)$ ke himpunan terbatas di Y .

Lemma 8.1.7 Diketahui $T : X \rightarrow Y$ operator linear terbatas, maka

$$\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : x \in X, \|x\| = 1 \}.$$

Bukti: Untuk $x \neq \theta$, maka katakan $\|x\| = a$. Misalkan $y = \frac{1}{a}x \neq \theta$

diperoleh $\|y\| = \left\| \frac{1}{a}x \right\| = \frac{1}{|a|}\|x\| = 1$. Karena T linear maka

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \left\{ \left\| \frac{1}{a}T(x) \right\| : x \in X, \|x\| = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left\| T\left(\frac{1}{a}x\right) \right\| : x \in X, \|x\| = 1 \right\} \\ &= \sup \{ \|T(y)\| : y \in X, \|y\| = 1 \}. \quad \square \end{aligned}$$

Operator identitas $I : X \rightarrow X$ pada ruang bernorma $X \neq \{\theta\}$ adalah operator terbatas dengan $\|I\| = 1$.

Sedangkan operator null (zero operator) $\theta : X \rightarrow Y$ pada ruang bernorma X adalah operator terbatas dengan $\|\theta\| = 0$.

Didefinisikan operator integral $T : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ oleh

$$y = T(x) \text{ dengan } y(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds,$$

di mana $k(t,s)$ fungsi yang diberikan dan diasumsikan fungsi kontinu.

Fungsi $k(t,s)$ disebut kernel dari T . Maka T operator linear terbatas.

Fungsional adalah operator dengan range berupa pada himpunan semua bilangan real R atau kompleks. Fungsional dinotasikan dengan huruf kecil seperti $f, g, h, \dots$ sedangkan domain dan range dari suatu fungsional berturut-turut dinotasikan $D(f)$ dan $R(f)$. Nilai dari f atas $x \in D(f)$ adalah $f(x) \in R(f)$.

Berikut diberikan definisi dari fungsiinal dan fungsional linear terbatas.

Definisi 8.1.8 Fungsional linear adalah operator dengan domain di ruang vector X (ruang linear) dan range di lapangan R atas X ,

$$f : D(f) \rightarrow R.$$

Definisi 8.1.9 Fungsional linear terbatas adalah operator linear terbatas dengan range lapangan atas ruang bernorma X , yaitu ada bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in D(f)$ berlaku

$$|f(x)| \leq M \|x\|.$$

Lebih lanjut, norm dari f adalah

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in D(f), x \neq \theta \right\},$$

atau

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| : x \in D(f), \|x\| = 1 \}.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|.$$

Teorema 8.1.10 Fungsional linear f , dengan $D(f)$ di dalam ruang bernorma adalah kontinu jika dan hanya jika f terbatas. $\square$

Jadi, fungsional linear kontinu disebut juga fungsional linear terbatas.

Norm $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ pada ruang bernorma $(X, \|\cdot\|)$ adalah fungsional pada X yang mana tidak linear.

Integral tentu adalah suatu bilangan atas fungsi yang tunggal. Namun, kondisi akan berubah jika dipertimbangkan integral itu untuk setiap fungsi pada ruang fungsi tertentu. Maka integral tersebut akan menjadi fungsional pada ruang tersebut, katakan f .

Contoh 8.1.11 Didefinisikan $f: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oleh

$$f(x) = \int_a^b x(t) dt.$$

Fungsional f linear kontinu.

Bukti: Fungsional f linear, sebab untuk sebarang $x, y \in C[a, b]$ dan scalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \int_a^b (\alpha x(t) + \beta y(t)) dt \\ &= \alpha \int_a^b x(t) dt + \beta \int_a^b y(t) dt \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Untuk menunjukkan fungsional f kontinu, ditunjukkan f terbatas.

Pandang $\|f\| = b - a$. Maka diperoleh

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left| \int_a^b x(t) dt \right| \\
&\leq (b-a) \max \{ |x(t)| : t \in [a, b] \} \\
&= (b-a) \|x\|
\end{aligned}$$

Jadi, terdapat bilangan real $M = b - a > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in D(f) = C[a, b]$, berlaku

$$|f(x)| \leq M \|x\|.$$

Hal ini memberikan arti bahwa f terbatas.

Jadi, fungsional f linear kontinu atau linear terbatas. $\square$

Melalui operator linear terbatas $T : X \rightarrow Y$ pada ruang bernorma X , dapat dibentuk operator lain yang disebut operator adjoint (operator pendamping). Motivasi dari operator adjoint adalah dapat digunakan untuk mencari solusi dari persamaan yang mengandung operator, seperti persamaan-persamaan yang muncul dalam fisika. Sehingga operator adjoint perlu dikaji beserta sifat-sifatnya.

Pandang operator $T : X \rightarrow Y$ dengan X dan Y dua ruang bernorma. Akan didefinisikan operator adjoint T^* dari T . Untuk itu dapat dimulai dari sebarang fungsional linear g pada Y . Jelas bahwa g terdefinisi untuk setiap $y \in Y$. Katakan $y = T(x)$, maka untuk memperoleh fungsional f pada X didefinisikan

$$f(x) = g(T(x)),$$

untuk setiap $x \in X$.

Dapat ditunjukkan bahwa f linear, karena g dan T linear. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa f terbatas.

$$|f(x)| = |g(T(x))| \leq \|g\| \|T(x)\| \leq \|g\| \|T\| \|x\|.$$

Dengan mengambil supremum atas semua $x \in X$ di mana $\|x\| = 1$, maka diperoleh

$$\|f\| \leq \|g\| \|T\|.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $f \in X^*$, di mana X^* ruang dual dari ruang bernorma X . Oleh asumsi $g \in Y^*$ di mana Y^* ruang dual dari ruang bernorma Y , berakibat untuk variable $g \in Y^*$ dapat didefinisikan operator dari Y^* ke X^* . Operator ini disebut operator adjoint dari T , dan dinotasikan dengan T^* .

Jadi,

$$T: X \rightarrow Y \text{ dan } T^*: Y^* \rightarrow X^*.$$

Definisi 8.1.12 Diketahui dua ruang bernorma X dan Y dan operator linear terbatas $T: X \rightarrow Y$. Operator adjoint $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ didefinisikan oleh

$$f(x) = (T^*g)(x) = g(T(x)),$$

dengan X^* dan Y^* berturut-turut adalah ruang dual dari X dan Y .

Teorema 8.1.13 Operator adjoint T^* linear dan terbatas dengan

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Bukti: Operator T^* linear dengan domain Y^* .

Diambil sebarang $g_1, g_2 \in Y^*$ dan sebarang scalar $\alpha, \beta \in R$ berlaku

$$\begin{aligned} T^*(\alpha g_1 + \beta g_2)(x) &= (\alpha g_1 + \beta g_2)T(x) \\ &= \alpha g_1 T(x) + \beta g_2 T(x) \\ &= \alpha (T^* g_1)(x) + \beta (T^* g_2)(x). \end{aligned}$$

Jadi, T^* linear.

Karena $f(x) = (T^* g)(x) = g(T(x))$ untuk setiap $x \in X$, maka diperoleh

$$f = T^* g.$$

Lebih lanjut,

$$\|f\| = \|T^* g\| \leq \|g\| \|T\|.$$

Dengan mengambil supremum atas semua $g \in Y^*$ di mana $\|g\| = 1$, maka diperoleh

$$\|T^*\| \leq \|T\|.$$

Sekarang ditunjukkan $\|T^*\| \geq \|T\|$.

Untuk setiap $x_0 \in X, x_0 \neq \theta$ terdapat $g_0 \in Y^*$ sedemikian sehingga

$$\|g_0\| = 1 \text{ dan } g_0(T(x_0)) = \|T(x_0)\|.$$

Menurut definisi operator adjoint, $g_0(T(x_0)) = (T^* g_0)(x_0)$ dan dengan

$f_0 = (T^* g_0)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \|T(x_0)\| &= g_0(T(x_0)) = f_0(x_0) \\ &\leq \|f_0\| \|x_0\| \\ &= \|T^* g_0\| \|x_0\| \end{aligned}$$

$$\leq \|T^*\| \|g_0\| \|x_0\|.$$

Karena $\|g_0\| = 1$ dan berlaku untuk setiap $x_0 \in X$, maka

$$\|T(x_0)\| \leq \|T^*\| \|x_0\|.$$

Karena $\|T(x_0)\| \leq \|T\| \|x_0\|$ dan dengan mengambil $M = \|T\| > 0$ sedemikian sehingga $\|T(x_0)\| \leq M \|x_0\|$ dipenuhi untuk setiap $x_0 \in X$ maka $\|T^*\|$ tidak akan lebih kecil dari $\|T\|$.

Jadi, $\|T^*\| \geq \|T\|$.

Karena $\|T^*\| \geq \|T\|$ dan $\|T^*\| \leq \|T\|$, maka $\|T^*\| = \|T\|$. $\square$

Diberikan dua operator linear terbatas $T, S : X \rightarrow Y$. Pada operator adjoint diperoleh

$$(T^* + S^*) = S^* + T^* \text{ dan } (\alpha T^*) = \alpha T^*.$$

Sedangkan jika $T : X \rightarrow Y$ dan $S : Y \rightarrow Z$, diperoleh

$$(ST)^* = T^* S^*.$$

Operator linear kompak sangat penting dalam aplikasinya. Operator ini memegang peranan dalam teori persamaan integral dan berbagai masalah dalam matematika fisika. Operator kompak ini dibangun tidak berdasarkan operator adjoint. Berikut definisi dan sifat-sifat dari operator kompak.

Definisi 8.1.14 Diketahui X dan Y dua ruang bernorma. Operator $T : X \rightarrow Y$ dikatakan operator linear kompak jika T linear dan jika untuk setiap himpunan terbatas $M \subset X$, image $T(M)$ kompak relative, yaitu closure $\overline{T(M)}$ kompak.

Setiap himpunan dalam ruang metrik atau ruang bernorma dikatakan kompak jika setiap barisan terbatas di himpunan tersebut mempunyai subbarisan yang konvergen. Oleh karena itu, Definisi 8.1.14 dapat dinyatakan sebagai berikut.

Teorema 8.1.15 Diketahui X dan Y dua ruang bernorma. Operator $T : X \rightarrow Y$ dikatakan operator linear kompak jika dan hanya jika T linear dan jika setiap barisan $\{x_n\} \subset X$ yang terbatas terdapat subbarisan $\{T(x_{n_k})\} \subset \{T(x_n)\}$ yang konvergen. $\square$

Contoh 8.1.16 Operator null (nol) merupakan operator kompak.

Teorema 8.1.17 Jika $T, S : X \rightarrow Y$ dua operator kompak dan sebarang scalar $\alpha \in R$, maka $T + S$ dan αT berturut-turut merupakan operator kompak.

Bukti: Diambil barisan $\{x_n\} \subset X$ dengan $\|x_n\| \leq 1$ untuk setiap $n \in N$ dan sebarang scalar $\alpha \in R$. Karena T operator kompak, maka terdapat subbarisan $\{T(x_{n_k})\} \subset \{T(x_n)\}$ yang konvergen

Akibatnya, $\{\alpha T(x_{n_k})\} \subset \{\alpha T(x_n)\}$ konvergen.

Jadi, αT operator kompak.

Karena S operator kompak, maka terdapat subbarisan $\{x_{m_k}\} \subset \{x_{n_k}\}$ sehingga $\{S(x_{m_k})\} \subset \{S(x_{n_k})\} \subset \{S(x_n)\}$ konvergen.

Oleh karena itu diperoleh subbarisan

$$\{(T+S)(x_{m_k})\} = \{T(x_{m_k})\} + \{S(x_{m_k})\} \subset \{(T+S)(x_n)\}$$

konvergen.

Jadi, $T+S$ operator kompak. $\square$

Teorema 8.1.18 Jika $T, S : X \rightarrow X$ dua operator kompak, maka ST dan TS operator kompak.

Bukti: Menurut yang diketahui, karena T operator kompak maka untuk sebarang barisan $\{x_n\} \subset X$ dengan $\|x_n\| \leq 1$ untuk setiap $n \in N$ terdapat subbarisan $\{T(x_{n_k})\} \subset \{T(x_n)\}$ yang konvergen ke suatu $y \in X$. Hal ini berakibat barisan $\{ST(x_{n_k})\} \subset \{ST(x_n)\}$ konvergen ke $S(y)$. Jadi ST operator kompak.

Untuk hal yang sama, karena S operator kompak maka untuk sebarang barisan $\{x_n\} \subset X$ dengan $\|x_n\| \leq 1$ untuk setiap $n \in N$ terdapat subbarisan

$\{S(x_{n_k})\} \subset \{S(x_n)\}$ yang konvergen ke suatu $y \in X$. Hal ini berakibat barisan $\{TS(x_{n_k})\} \subset \{TS(x_n)\}$ konvergen ke $T(y)$. Jadi TS operator kompak. $\square$

Teorema 8.1.19 *Diketahui X ruang bernorma dan Y ruang Banach. Jika $\{T_n\} \subset L_c(X, Y)$ barisan operator kompak yang konvergen ke suatu $T \in L_c(X, Y)$, maka T operator kompak.*

Bukti: Diambil sebarang barisan $\{x_n\} \subset X$ dengan $\|x_n\| \leq 1$ untuk setiap $n \in N$. Menurut yang diketahui, maka terdapat barisan $\{T_1(x_n^1)\} \subset Y$ konvergen, terdapat barisan $\{T_2(x_n^2)\} \subset Y$ yang konvergen, terdapat barisan $\{T_3(x_n^3)\} \subset Y$ yang konvergen, dan seterusnya.

Jadi untuk setiap $k \in N$ terdapat subbarisan $\{x_n^k\} \subset \{x_n^{k-1}\}$ sehingga barisan $\{T_n(x_n^k)\} \subset Y$ yang konvergen. Oleh karena itu untuk setiap $k \in N$ terdapat $u_k \in Y$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_k(x_n^k) = u_k.$$

Karena $\{T_n\}$ konvergen ke T , maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x \in X$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku

$$\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{8\|x\| + 1}.$$

Lebih lanjut untuk setiap bilangan asli $n, m \geq n_0$ dan $x \in X$ berlaku

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \|T_n - T\| \|x\| < \frac{\varepsilon}{8}$$

dan

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Oleh karena itu, untuk setiap bilangan asli $k \geq n_0$ diperoleh

$$\begin{aligned} \|T(x_m^m) - T(x_n^n)\| &\leq \|T(x_m^m) - T_k(x_m^m)\| + \|T_k(x_m^m) - T_k(x_n^n)\| \\ &\quad + \|T_k(x_n^n) - T(x_n^n)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini berarti barisan $\{T(x_n^n)\} \subset Y$ merupakan barisan Cauchy. Karena Y lengkap (ruang Banach) maka $\{T(x_n^n)\} \subset Y$ konvergen.

Jadi, T operator kompak. $\square$

Definisi 8.1.20 Diketahui X dan Y dua ruang bernorma. Operator $T : X \rightarrow Y$ dikatakan operator linear kompak lemah jika dan hanya jika T linear dan jika setiap barisan $\{x_n\} \subset X$ yang terbatas terdapat subbarisan $\{T(x_{n_k})\} \subset \{T(x_n)\}$ yang konvergen lemah, yaitu untuk setiap $x^* \in X^*$ subbarisan $\{x^*T(x_{n_k})\} \subset \{x^*T(x_n)\}$ yang konvergen.

8.2 Operator pada Integral Dunford

Fungsi terukur lemah dan Lemma Dunford mendasari terbentuknya integral Dunford. Berdasarkan integral Dunford dikonstruksi operator pada ruang fungsi terintegral Dunford. Dikaji norma pada ruang fungsi terintegral Dunford. Selanjutnya berdasarkan operator yang telah dibangun, dikaji sifat-sifatnya terkait dengan operator adjoint dan operator kompak lemah. Lebih lanjut dibahas norma pada ruang operator linear terbatasnya.

Teorema menunjukkan bahwa koleksi semua fungsi yang terintegral Dunford pada $[a,b]$ merupakan ruang linear. Selanjutnya didefinisikan sebuah fungsi dari $D_L[a,b]$ ke himpunan semua bilangan real R .

Definisi 8.2.1 Diberikan ruang linear $D_L[a,b]$. Didefinisikan fungsi

$\|\cdot\|: D_L[a,b] \rightarrow R$ oleh

$$\|f\| = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} \left| (L) \int_A x^* f \right| \right\}$$

untuk setiap $f \in D_L[a,b]$.

Berdasarkan Definisi 8.2.1, ternyata fungsi yang didefinisikan dari $D_L[a,b]$ ke himpunan semua bilangan real R merupakan seminorm pada $D_L[a,b]$ seperti pada teorema berikut.

Teorema 8.2 Diberikan ruang linear $D_L[a,b]$. Pasangan $(D_L[a,b], \|\cdot\|)$ merupakan ruang seminorma terhadap

$$\|f\| = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} \left| (L) \int_A x^* f \right| \right\},$$

untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$.

Bukti: Dibuktikan bahwa fungsi $\|\cdot\|$ merupakan seminorma pada ruang linear $D_L[a, b]$.

(N1). Diambil sebarang $f \in D_L[a, b]$.

Karena untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $A \subset [a, b]$ berlaku $\left| (L) \int_A x^* f \right| \geq 0$, maka

$$\|f\| = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} \left| (L) \int_A x^* f \right| \right\} \geq 0.$$

Jadi, $\|f\| \geq 0$.

Jika $f = \theta$ pada $[a, b]$ maka $f(x) = \theta, \forall x \in [a, b]$, sehingga untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $A \subset [a, b]$ interval tertutup berlaku

$$f(x) = \theta, \forall x \in A \subset [a, b].$$

Hal ini berakibat untuk setiap $x^* \in X^*$ dengan $\|x^*\|_X \leq 1$ diperoleh

$$x^* f(x) = 0, \forall x \in A \subset [a, b].$$

sehingga

$$\Rightarrow (L) \int_A x^* f = 0, \forall x^* \in X^*, \|x^*\|_X \leq 1, \forall x \in A \subset [a, b]$$

$$\Rightarrow \left| (L) \int_A x^* f \right| = 0, \forall x^* \in X^*, \|x^*\|_X \leq 1, \forall x \in A \subset [a, b]$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in A} \left| (L) \int_A x^* f \right| = 0$$

$$\Rightarrow \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} \left| (L) \int_A x^* f \right| \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \|f\| = 0.$$

Jadi, jika $f = \theta$ maka $\|f\| = 0$.

(N2). Diambil sebarang $f \in D_L[a, b]$ dan sebarang skalar $k \in R$, diperoleh

$$\begin{aligned} \|kf\| &= \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} \left| (L) \int_A x^* (kf) \right| \right\} \\ &= \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} |k| \left| (L) \int_A x^* f \right| \right\} \\ &= |k| \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} \left| (L) \int_A x^* f \right| \right\} \\ &= |k| \|f\|. \end{aligned}$$

(N3). Diambil sebarang $f, g \in D[a, b]$ diperoleh

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} \left| (L) \int_A x^* (f + g) \right| \right\} \\ &= \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} \left| (L) \int_A x^* f + (L) \int_A x^* g \right| \right\} \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} & \sup_{A \subset [a,b]} \left\{ \left| (L) \int_A x^* f + (L) \int_A x^* g \right| \right\} \\ & \leq \sup_{A \subset [a,b]} \left\{ \left| (L) \int_A x^* f \right| \right\} + \sup_{A \subset [a,b]} \left\{ \left| (L) \int_A x^* g \right| \right\} \end{aligned}$$

Maka untuk setiap $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$ berlaku

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} \left\{ \left| (L) \int_A x^* f + (L) \int_A x^* g \right| \right\} \right\} \\ & \leq \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} \left| (L) \int_A x^* f \right| \right\} + \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} \left| (L) \int_A x^* g \right| \right\} \end{aligned}$$

Jadi,

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Terbukti bahwa $(D_L[a,b], \|\cdot\|)$ merupakan ruang seminorma terhadap

$$\|f\| = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \left\{ \sup_{A \subset [a,b]} \left| (L) \int_A x^* f \right| \right\}. \quad \square$$

Selanjutnya berdasarkan seminorma seperti pada Definisi 8.2.1 didefinisikan fungsi jarak pada ruang linear $D_L[a,b]$.

Definisi 8.2.3 Didefinisikan fungsi $d : D_L[a,b] \times D_L[a,b] \rightarrow R$ oleh

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

untuk setiap $f, g \in D_L[a,b]$.

Fungsi $d : D_L[a, b] \times D_L[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seperti pada Definisi 8.2.3 merupakan pseudometrik pada $D_L[a, b]$.

Teorema 8.2.4 *Ruang linear $D_L[a, b]$ merupakan ruang pseudometrik terhadap fungsi jarak*

$$d(f, g) = \|f - g\|,$$

untuk setiap $f, g \in D_L[a, b]$.

Bukti:

(D1). Diambil sebarang dua fungsi $f, g \in D_L[a, b]$, diperoleh

$$d(f, g) = \|f - g\| \geq 0.$$

(D2). Diambil sebarang dua fungsi $f, g \in D_L[a, b]$, diperoleh

$$d(f, g) = \|f - g\| = \|g - f\| = d(g, f).$$

(D3). Diambil sebarang tiga fungsi $f, g, h \in D_L[a, b]$, diperoleh

$$\begin{aligned} d(f, h) &= \|f - h\| = \|f - g + g - h\| \leq \|f - g\| + \|g - h\| \\ &= d(f, g) + d(g, h). \end{aligned}$$

Jadi, fungsi d merupakan pseudometrik pada $D_L[a, b]$. $\square$

Berdasarkan bukti dari Lemma Dunford, dikonstruksi operator pada ruang fungsi terintegral Dunford.

Diketahui L_1 adalah ruang fungsi terintegral Lebesgue pada $[a, b]$, X ruang Banach, dan X^* dual dari X .

Didefinisikan operator $T : X^* \rightarrow L_1$ oleh

$$T(x^*) = x^*(f)$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Operator T seperti pada definisi tersebut merupakan operator linear terbatas atau linear kontinu.

Teorema 8.2.5 *Operator T merupakan operator linear terbatas.*

Bukti: Diambil sebarang $x^*, y^* \in X^*$ dan sebarang $c \in \mathbb{R}$ diperoleh

$$\begin{aligned} T(x^* + y^*) &= (x^* + y^*)(f) \\ &= x^*(f) + y^*(f) \\ &= T(x^*) + T(y^*), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} T(cx^*) &= (cx^*)(f) \\ &= cx^*(f) \\ &= cT(x^*). \end{aligned}$$

Jadi operator T linear.

Lebih lanjut menurut Teorema Banach Graf Tertutup, operator T terbatas.

Jadi, operator T linear dan terbatas. $\square$

Lemma 8.2.6 *Dual dari L_1 adalah L_∞ , yaitu $L_1^* = L_\infty$.*

Bukti: Untuk setiap $y = \{y_n\} \in L_\infty$ dibentuk fungsional F_y pada L_1 dengan rumus

$$F_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Diperoleh bahwa F_y linear, yaitu

Untuk sebarang $x = \{x_n\}, z = \{z_n\} \in L_1$ dan sebarang skalar $c \in R$ berlaku

$$\begin{aligned} F_y(x+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + z_n) y_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n) y_n + \sum_{n=1}^{\infty} (z_n) y_n \\ &= F_y(x) + F_y(z), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} F_y(cx) &= \sum_{n=1}^{\infty} (cx_n) y_n \\ &= c \sum_{n=1}^{\infty} (x_n) y_n \\ &= cF_y(x). \end{aligned}$$

Diperoleh juga bahwa F_y kontinu, yaitu

Untuk setiap $x = \{x_n\} \in L_1$ berlaku

$$\begin{aligned} |F_y(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \\ &\leq \|x\|_1 \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

Jadi setiap $y = \{y_n\} \in L_\infty$ menentukan dengan tunggal fungsional linear kontinu F_y pada L_1 , atau $L_\infty \subset L_1^*$.

Sebaliknya, diambil sebarang fungsional linear kontinu F pada L_1 .

Untuk setiap $x = \{x_n\} \in L_1$ dapat direpresentasikan oleh

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n ,$$

dengan $e_n = \left\{ \underset{\text{ke } n}{0, \dots, 1, 0, \dots, 0} \right\}$.

Karena F linear, maka diperoleh

$$F(x) = F\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n F(e_n) .$$

Hal ini berarti bahwa $F(x)$ merupakan kombinasi linear dari barisan bilangan $\{F(e_n)\}$ atau fungsional linear kontinu F bergantung pada barisan bilangan $\{F(e_n)\}$.

Selanjutnya karena F kontinu, maka $|F(x)|$ terbatas, yaitu $|F(x)| < \infty$.

Menurut Ketaksamaan Cauchy-Schwartz, diperoleh

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \left| F\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n (F(e_n)) \right| \\ &\leq \|x\|_{L_1} \sup_{n \geq 1} |F(e_n)| . \end{aligned}$$

Supaya $F(x)$ terbatas, maka haruslah $\sup_{n \geq 1} |F(e_n)| < \infty$.

Hal ini berarti bahwa $y = \{T(e_n)\} \in L_\infty$.

Jadi, setiap fungsional linear kontinu F pada L_1 menentukan dengan tunggal vektor $y = \{T(e_n)\} \in L_\infty$, yaitu $L_1^* \subset L_\infty$.

Jadi, karena $L_\infty \subset L_1^*$ dan $L_1^* \subset L_\infty$, maka $L_1^* = L_\infty$. $\square$

Misalkan X^{**} dual kedua dari X . Didefinisikan operator $T^*: L_1^* \rightarrow X^{**}$ oleh

$$\begin{aligned} T^*(g)(x^*) &= \int_a^b gT(x^*) \\ &= \int_a^b g x^*(f) \end{aligned}$$

untuk setiap $g \in L_1^* = L_\infty$.

Operator T^* disebut operator adjoint pada L_1 .

Teorema 8.2.7 *Operator adjoint T^* merupakan operator linear terbatas dan*

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Bukti: Operator adjoint T^* linear, yaitu

Untuk sebarang $g_1, g_2 \in L_1^* = L_\infty$ dan sebarang skalar $c_1, c_2 \in R$ berlaku

$$\begin{aligned} T^*(c_1g_1 + c_2g_2)(x^*) &= \int_a^b (c_1g_1 + c_2g_2)T(x^*) \\ &= \int_a^b (c_1g_1T(x^*) + c_2g_2T(x^*)) \\ &= c_1 \int_a^b (g_1T(x^*)) + c_2 \int_a^b (g_2T(x^*)) \end{aligned}$$

$$= c_1 T^*(g_1)(x^*) + c_2 T^*(g_2)(x^*).$$

Karena $f = T^*(g)$ dan $\|f\| \leq \|g\| \|T\|$ maka diperoleh

$$\|T^*(g)\| = \|f\| \leq \|g\| \|T\|.$$

Jadi,

$$\|T^*\| \leq \|T\|.$$

Untuk setiap $x_0^* \neq \theta \in X^*$ terdapat $g_0 \in X^{**}$ dengan

$$\|g_0\| = 1 \text{ dan } g_0(T(x_0^*)) = \|T(x_0^*)\|.$$

Jadi,

$$g_0(T(x_0^*)) = T^*(g_0)(x_0^*).$$

Katakan $f_0 = T^*(g_0)$ dan diperoleh

$$\begin{aligned} \|Tx_0^*\| &= g_0(T(x_0^*)) \\ &= f_0(x_0^*) \\ &\leq \|f_0\| \|x_0^*\| \\ &= \|T^*g_0\| \|x_0^*\| \\ &\leq \|T^*\| \|g_0\| \|x_0^*\|. \end{aligned}$$

Karena $\|g_0\| = 1$, sehingga untuk setiap $x_0^* \neq \theta \in X^*$ berlaku

$$\|Tx_0^*\| \leq \|T^*\| \|x_0^*\|.$$

Jadi,

$$\|T\| \leq \|T^*\|.$$

Karena $\|T\| \leq \|T^*\|$ dan $\|T^*\| \leq \|T\|$, maka $\|T^*\| = \|T\|$. □

Teorema 8.2.8 Jika $T_1 : X^* \rightarrow L_1$ dan $T_2 : X^* \rightarrow L_1$ dua operator linear terbatas dan sebarang skalar $c \in R$, maka

$$(i) \quad (T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*.$$

$$(ii) \quad (cT_1)^* = cT_1^*.$$

$$(iii) \quad \|T_1 T_1^*\| = \|T_1^* T_1\| = \|T_1\|^2 = \|T_1^*\|^2.$$

Bukti: (i)

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)^* (g)(x^*) &= \int_a^b g(T_1 + T_2)(x^*) \\ &= \int_a^b gT_1(x^*) + \int_a^b gT_2(x^*) \\ &= T_1^*(g)(x^*) + T_2^*(g)(x^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad (cT_1)^* (g)(x^*) &= \int_a^b g(cT_1)(x^*) \\ &= c \int_a^b gT_1(x^*) \\ &= cT_1^*(g)(x^*). \end{aligned}$$

(iii) Karena T_1 dan T_1^* dua operator linear terbatas dan $\|T_1^*\| = \|T_1\|$, maka diperoleh $\|T_1 T_1^*\| = \|T_1^* T_1\| = \|T_1\|^2 = \|T_1^*\|^2$. $\square$

Jika $f \in D_L[a, b]$ maka operator adjoint T^* merupakan operator kompak lemah. Sebaliknya operator T juga merupakan operator kompak lemah. Menurut Teorema Gantmacher's, Operator T kompak lemah jika dan hanya jika operator adjoint T^* juga kompak lemah.

Teorema 8.2.9 Diketahui fungsi $f : [a, b] \rightarrow X$ terintegral Dunford pada $[a, b]$, maka pernyataan berikut ekuivalen:

- 1) Operator $T : X^* \rightarrow L_1$ merupakan operator kompak lemah.
- 2) Operator adjoint $T^* : L_\infty \rightarrow X^{**}$ merupakan operator kompak lemah.
- 3) Himpunan $\{x^*(f) \mid x^* \in B(X^*)\} \subset L_1$ terintegral seragam, yaitu

$$\lim_{\alpha(A) \rightarrow 0} \int_A x^*(f) = 0,$$

seragam untuk setiap $x^* \in B(X^*)$.

- 4) Indefinit integral Dunford $v(A)$ adalah countably additive, yaitu jika $A_n \subset [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ himpunan terukur yang saling asing maka

$$v\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n),$$

di X^{**} (deret $\sum_{n=1}^{\infty} v(A_n)$ konvergen di X^{**}).

Bukti: Menurut Teorema Gantmacher's, Operator T kompak lemah jika dan hanya jika operator adjoint T^* juga kompak lemah. Jadi 1) dan 2) ekuivalen.

Diberikan himpunan

$$T(B(X^*)) = \{x^* f \mid x^* \in B(X^*)\} \subset L_1.$$

Karena f terintegral Dunford pada $[a, b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi real $x^* f$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$, yaitu $x^* f \in L_1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \|x^* f\|_{L_1} &= \int_{[a,b]} |x^* f| \\
 &= \|T(x^*)\|_{L_1} \\
 &\leq \|T\| \\
 &< \infty
 \end{aligned}$$

untuk setiap $x^* \in B(X^*)$.

Karena operator T terbatas, maka himpunan $T(B(X^*))$ juga terbatas.

Himpunan $T(B(X^*)) \subset L_1$ adalah kompak lemah jika dan hanya jika

$$\lim_{\alpha(A) \rightarrow 0} \int_A x^* f \text{ seragam untuk setiap } x^* \in B(X^*).$$

Hal ini berarti 3) ekuivalen 1).

Diketahui bahwa 3) terpenuhi, maka

$$\lim_{\alpha(A) \rightarrow 0} \int_A |x^* f| = 0,$$

seragam untuk setiap $x^* \in B(X^*)$.

Berarti untuk setiap $\eta > 0$ terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga

$$\left| T(\chi_A)(x^*) \right| = \left| \int_A x^*(f) \right| < \eta$$

untuk setiap $x^* \in B(X^*)$.

Jika $\alpha(A) < \varepsilon$ maka diperoleh

$$\|T(\chi_A)\| \leq \eta.$$

Jika $A_n \subset [a, b]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ himpunan terukur yang saling asing

dan $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, maka

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha \left(A - \bigcup_{n=1}^N A_n \right) = 0.$$

Akibatnya

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| v \left(A - \bigcup_{n=1}^N A_n \right) \right\|_{X^{**}} = 0.$$

Karena $A = \left(A - \bigcup_{n=1}^N A_n \right) \cup \bigcup_{n=1}^N A_n$, maka

$$\begin{aligned} T^*(\chi_A) &= T^* \left(\chi_{A - \bigcup_{n=1}^N A_n} \right) + T^* \left(\chi_{\bigcup_{n=1}^N A_n} \right) \\ &= T^* \left(\chi_{A - \bigcup_{n=1}^N A_n} \right) + \sum_{n=1}^N T^*(\chi_{A_n}). \end{aligned}$$

Hal ini berarti bahwa

$$v(A) - \sum_{n=1}^N v(A_n) = v \left(A - \bigcup_{n=1}^N A_n \right)$$

dan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| v(A) - \sum_{n=1}^N v(A_n) \right\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| v \left(A - \bigcup_{n=1}^N A_n \right) \right\| = 0.$$

Jadi, $v(A)$ *countably additive*.

Andaikan 3) tidak berlaku, maka terdapat $k > 0$ dan barisan himpunan terukur $\{A_n\} \subset [a, b]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $\alpha(A_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ dan

$$\int_{A_n} |x_n^* f| > k,$$

untuk suatu $x_n^* \in B(X^*)$.

Karena himpunan terukur A_n berukuran 0, maka ada kemungkinan subbarisan dari A_n dan asumsikan bahwa $m < n$ sehingga diperoleh

$$\int_{A_m} |x_n^* f| < \frac{k}{2^{n+1}}.$$

Katakan $E_n = A_n - \bigcup_{m < n} A_m$; $E_n \subset [a, b]$ himpunan-himpunan terukur dengan

$$E_n \cap E_l = \emptyset, n \neq l \text{ dan}$$

$$\int_{E_n} |x_n^* f| = \int_{A_n} |x_n^* f| - \int_{\bigcup_{m < n} A_m} |x_n^* f| > \frac{k}{2}.$$

Jadi, terdapat $B_n \subset E_n$ himpunan terukur yang saling asing sehingga

$$\int_{B_n} |x_n^* f| > \frac{k}{4}.$$

Dengan demikian

$$\|T^*(\chi_{B_n})\| > \frac{k}{4},$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Jadi, deret $\sum_{n=1}^{\infty} T^*(\chi_{B_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} v(B_n)$ tidak konvergen.

Hal ini berarti 4) tidak memenuhi.

Jadi, 3) ekuivalen 4). $\square$

Telah ditunjukkan pada Teorema 8.2.5 bahwa operator $T : X^* \rightarrow L_1$ merupakan operator linear terbatas atau operator linear kontinu. Selanjutnya himpunan semua operator linear terbatas $T : X^* \rightarrow L_1$ dinotasikan $B(X^*, L_1)$.

Teorema 8.2.10 $B(X^*, L_1)$ merupakan ruang linear.

Bukti: Diambil sebarang $T_1, T_2 \in B(X^*, L_1)$ dan sebarang skalar $c \in R$, maka berlaku $(T_1 + T_2) \in B(X^*, L_1)$ dan $cT_1 \in B(X^*, L_1)$. $\square$

Untuk setiap $f \in D_L[a, b]$ dan $x^* \in X^*$ didefinisikan fungsi $\|\cdot\| : B(X^*, L_1) \rightarrow R$ oleh

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \left\{ \|Tx^*\| : x^* \in X^*, \|x^*\| = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \|x^* f\| : x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, f \in D_L[a, b] \right\}. \end{aligned}$$

Fungsi $\|\cdot\| : B(X^*, L_1) \rightarrow R$ merupakan norma, seperti yang diuraikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 8.2.11 $(B(X^*, L_1), \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma dengan norma

$$\|T\| = \sup \left\{ \|x^* f\| : x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, f \in D_L[a, b] \right\}.$$

Bukti:

(N1) Jelas bahwa $\|T\| = \sup \left\{ \|x^* f\| : x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, f \in D_L[a, b] \right\} \geq 0$.

$$\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = \theta.$$

$$\begin{aligned}
(\text{N2}) \quad \|cT\| &= \sup \left\{ \|cx^* f\| : x^* \in X^*, \|x^*\|=1, f \in D_L[a, b] \right\} \\
&= \sup \left\{ |c| \|x^* f\| : x^* \in X^*, \|x^*\|=1, f \in D_L[a, b] \right\} \\
&= |c| \sup \left\{ \|x^* f\| : x^* \in X^*, \|x^*\|=1, f \in D_L[a, b] \right\} \\
&= |c| \|T\|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{N3}) \quad \|T + S\| &= \sup \left\{ \|x^* (f + g)\| : x^* \in X^*, \|x^*\|=1, f, g \in D_L[a, b] \right\} \\
&= \sup \left\{ \|x^* f + x^* g\| : x^* \in X^*, \|x^*\|=1, f, g \in D_L[a, b] \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \|x^* f\| : x^* \in X^*, \|x^*\|=1, f \in D_L[a, b] \right\} + \\
&\quad \sup \left\{ \|x^* g\| : x^* \in X^*, \|x^*\|=1, g \in D_L[a, b] \right\} \\
&= \|T\| + \|S\|.
\end{aligned}$$

Jadi, $(B(X^*, L_1), \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma. $\square$

Karena menurut teorema bahwa setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik, maka $(B(X^*, L_1), \rho)$ merupakan ruang metrik terhadap metrik

$$\rho(f, g) = \sup \left\{ \|x^* (f - g)\| : x^* \in X^*, \|x^*\|=1, f, g \in D_L[a, b] \right\}.$$

Lebih lanjut untuk setiap $f, g \in D_L[a, b]$, $\alpha \in R$ memenuhi

$$\begin{aligned}
\rho(f + a, g + a) &= \sup \left\{ \|x^* (f + a - g - a)\| : x^* \in X^*, \|x^*\|=1, f, g \in D_L[a, b] \right\} \\
&= \sup \left\{ \|x^* (f - g)\| : x^* \in X^*, \|x^*\|=1, f, g \in D_L[a, b] \right\} \\
&= \rho(f, g)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 \rho(\alpha f, \alpha g) &= \sup \left\{ \|x^* (\alpha f - \alpha g)\| : x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, f, g \in D_L[a, b] \right\} \\
 &= \sup \left\{ \|\alpha x^* (f - g)\| : x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, f, g \in D_L[a, b] \right\} \\
 &= \sup \left\{ |\alpha| \|x^* (f - g)\| : x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, f, g \in D_L[a, b] \right\} \\
 &= |\alpha| \sup \left\{ \|x^* (f - g)\| : x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, f, g \in D_L[a, b] \right\} \\
 &= |\alpha| \rho(f, g).
 \end{aligned}$$

Fungsi f dan g dikatakan ekuivalen, jika $f = g$ hampir dimana-
mana pada $[a, b]$, yaitu jika terdapat himpunan terukur- α $E \subset [a, b]$
dengan $\mu_\alpha(E) = 0$ sehingga

$$f(x) = g(x),$$

untuk setiap $x \in [a, b] - E$.

Telah ditunjukkan bahwa untuk setiap fungsi f terintegral Dunford
operator $T : X^* \rightarrow L_1$, oleh

$$T(x^*) = x^*(f),$$

untuk setiap $x^* \in X^*$ merupakan operator linear terbatas. Sedangkan
himpunan semua operator linear terbatas $T : X^* \rightarrow L_1$ yang dinotasikan
dengan $B(X^*, L_1)$ merupakan ruang linear. Selanjutnya telah
diperlihatkan juga bahwa, terhadap norma operator

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup \left\{ \|Tx^*\| : x^* \in X^*, \|x^*\| = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \|x^* f\| : x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, f \in D_L[a, b] \right\},\end{aligned}$$

$(B(X^*, L_1), \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma.

Menurut Teorema 3.2.8, karena X^* ruang Banach dan L_1 ruang Banach maka $B(X^*, L_1)$ merupakan ruang Banach, yaitu ruang bernorma yang lengkap.

Teorema 8.2.12 $B(X^*, L_1)$ merupakan ruang bernorma yang lengkap.

Bukti: Diambil sebarang $(T_n) \subset B(X^*, L_1)$ barisan Cauchy, yaitu untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sedemikian sehingga

$$\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

untuk setiap bilangan asli $m, n \geq n_0$.

Untuk setiap $x^* \in X^*$ berlaku

$$\begin{aligned}\|T_n - T_m\| &= \sup \left\{ \|x^* f_n - x^* f_m\| : x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \right. \\ &\quad \left. f_n, f_m \in D_L[a, b], n = 1, 2, 3, \dots \right\} \\ &< \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Hal ini berakibat

$$\|x^*(f_n) - x^*(f_m)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Jadi, $(x^* f_n)$ barisan Cauchy di L_1 . Karena L_1 lengkap, maka barisan Cauchy $(x^* f_n)$ konvergen di L_1 . Katakan konvergen ke $F \in L_1$.

Karena $x^* f_n \in L_1$, untuk setiap bilangan asli n maka $f_n \in D_L[a, b]$ dan karena barisan $(x^* f_n)$ konvergen untuk setiap $x^* \in X^*$ maka barisan (f_n) konvergen lemah.

Selanjutnya karena T_n terbatas, maka ada bilangan riil $M \geq 0$ sehingga untuk setiap $x^* \in X^*$ berlaku

$$\|x^* f_n\| = \|T_n(x^*)\| \leq M$$

untuk setiap bilangan asli n .

Untuk setiap $x^* \in X^*$, dibentuk

$$T(x^*)(x) = x^* g(x) = M,$$

untuk setiap $x \in A \subset [a, b]$ interval tertutup dan suatu $g \in D_L[a, b]$.

Diperoleh $x^* g = M \in L_1$ dan $g \in D_L[a, b]$

Jadi, untuk setiap $x^* \in X^*$ berlaku,

$$\|x^* f_n\| = \|T_n(x^*)\| \leq M = T(x^*) = x^* g.$$

Karena (f_n) konvergen lemah dan $\|x^* f_n\| \leq x^* g$ untuk setiap $x^* \in X^*$ dan suatu $g \in D_L[a, b]$, maka menurut Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue (Teorema 7.1.7) diperoleh bahwa $F = x^* f \in L_1$, yaitu $f \in D_L[a, b]$.

Jadi, $B(X^*, L_1)$ lengkap. $\square$

DAFTAR PUSTAKA

- Azar, K. H. & Tazekand, M. M. (2013), The Relationship Between M-Weakly Compact Operator and Order Weakly Compact Operator, *Gen. Math. Notes*, 18(1):10-15
- Aziz, A., Solikhin, Sumanto, Y.D & Heri SU, R. (2021), Primitive Function of the Dunford Integral, *Journal of Physics : Conference series*, 1943 (2021) 012134
- Bartle, R.G. & Sherbert, D.R. (2011), *Introduction to Real Analysis (4th Ed)*, John Willey & Sons, Inc USA.
- Capinski, M. & Kopp, E. (2004), *Measure, Integral and Probability, second edition*, Springer-Verlag London.
- Darmawijaya, S. (2007), *Pengantar Analisis Abstrak*, Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
- Games, J.L. & Mendoza, J. (1998), On Denjoy-Dunford and Denjoy-Pettis Integrals, *Studia Mathematica*, 130(2): 115-133
- Gordon, R.A. (1994), *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Mathematical Society, USA.
- Guoju, Ye. & Tianqing, An. (2001), On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals, *IJMMS*, 25(7): 467-478.
- Kreyszig, E. (1989), *Introductory Funtional Analysis with Applications*, John Willey & Sons, Inc USA.
- Lee P.Y. (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore.

- Lee P.Y. & Vyborny, R. (2000), *Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*, Cambridge University Press, USA.
- Maligranda, Lech. (1992), Weakly Compact Operator and Interpolation, *Acta Applicandae Mathematicae*, 27:79-89
- Sakai, Shiochiro. (1964), Weakly Compact Operators on Operator Algebras, *Pacific Journal of Mathematics*, 14(2):659-664
- Schwabik, S., Guoju, Ye. (2005), *Topics in Banach Space Integration*, World Scientific, Singapore.
- Solikhin, Sumanto, Y.D., Aziz, A. & Hariyanto, S. (2018), Operator pada Ruang Fungsi Terintegral Dunford, *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 2(1): 110-122
- Solikhin, Sumanto, Y.D., Aziz, A. & Hariyanto, S. (2019), Seminorma pada Ruang Fungsi Terintegral Dunford, *Journal of Fundamental Mathematics and Applications*, 2(1): 26-34
- Solikhin, Sumanto, Y.D., Aziz, A. & Hariyanto, S. (2019), Norma Operator pada Ruang Fungsi Terintegral Dunford, *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 2(2): 93-100
- Solikhin, Hariyanto, S., Sumanto, Y.D., & Aziz, A. (2020), Operator Adjoint pada Ruang Fungsi Terintegral Dunford, Prisma: Prosiding Seminar Nasional Matematika, 3(2020): 34-40
- Solikhin, Hariyanto, S., Sumanto, Y.D., & Aziz, A. (2020), Weakly Compact Linear Operators on Space of Dunford Integral Function, *Journal of Physics : Conference series*, 1524 (2020) 012045
- Solikhin, Sumanto, Y.D., Aziz, A. & Hariyanto, S. (2020), Ruang Bernorma Lengkap Atas Operator Linear Terbatas pada

Ruang Fungsi Terintegral Dunford, *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 3(1): 47-55

Solikhin, Aziz, A., Sumanto, Y.D., & Heri SU, R. (2021), A Convergence Theorem on the Dunford Integral, *Journal of Physics : Conference series*, 1943 (2021) 012124

W.J. Davis, T. Vigiél, W.B. Johnson, and A. Pelczynski. (1974), Factoring Weakly Compact Operators, *Journal of Functional Analysis*, 17:311-327

BIOGRAFI PENULIS



Solikhin, lahir di Pekalongan 30 Juni 1985. Lulus SMAN 1 Wiradesa, menempuh Pendidikan S1 di Universitas Diponegoro (Undip) Semarang dan Pendidikan S2 di Universitas Gadjah Mada Yogyakarta pada bidang Matematika. Ia adalah Dosen Tetap di Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro Semarang. Ia aktif dalam penelitian dan pengabdian kepada masyarakat baik internal maupun eksternal. Beberapa buku yang pernah ditulisnya adalah buku ajar Metode Numerik, Analisis Numerik, dan modul Matematika Dasar, serta Kerajinan Logam di Kabupaten Tegal Jawa Tengah.



Abdul Aziz, lahir di Semarang, 06 Februari 1985. Beliau telah menyelesaikan pendidikan S1 di Jurusan Matematika Universitas Diponegoro dan S2 di Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada. Saat ini, Beliau adalah Dosen Matematika di Departemen Matematika Universitas Diponegoro dan di Program Studi Teknologi Dan Konstruksi Bangunan Gedung Politeknik Pekerjaan Umum. Beliau juga pernah meraih penghargaan dari Museum Rekor Dunia Indonesia (**MURI**) dalam aksinya “**Mengajar Matematika Terlama 30 Jam Nonstop**” pada tahun 2009.

INDEKS

- Additive
 - Subcountably 7
- Bola
 - terbuka 1
 - tertutup 1
- Cauchy
 - Barisan 22, 40
 - Kriteria 22, 91
- Degenerate 2
- Diameter 1
- Fungsi
 - Aditif 121
 - Barisan 17
 - Bervariasi
 - terbatas 133
 - terbatas kuat 133
 - terbatas terintlak 138
 - Terbatas kuat terintlak 138
 - Dirichlet 105
 - Ekstensi Harnack 164
 - Linear 46
 - Kontinu 47, 145
 - Kontinu
 - Kuat 145
 - Lemah 145
 - mutlak 124
 - mutlak kuat 125
 - Mutlak terintlak 136
 - Primitif 82
 - Sederhana 109
 - Tangga 74
 - Terbatas 21
 - Terukur 67, 110
 - Terukur lemah 111
- Fungsional 177
- Hampir dimana-mana 70
- Himpunan
 - Content zero 4, 6
 - Interval 2
 - Measure zero 5, 6
 - Terbatas 1
 - Terukur 3, 8

Integral	Seragam 149
Dunford 114	Terbatas 163
Henstock 92	Terdominasi Lebesgue 159
Lebesgue 78	Konvergen
McShane 80	Barisan 40
Riemann 77	Lemah 148
Invarian	Lemah seragam 148
Translasi 39	Pointwise 17
Jarak 1	Seragam 19
Ketaksamaan	Lemma
Holder 34	Cousin 64
Minskowski 35	Dunford 112
Young 33	Fatou 157
Kontinu	Sack-Henstock 91, 124
Fungsi 47, 145	Lengkap 41
Kuat 145	Metrik
Lemah 145	Biasa 38
Mutlak 124	Diskrit 39
Mutlak kuat 125	Ruang 31
Mutlak terintlak 136	Monoton
Mutlak kuat terintlak 136	Naik 148
Seragam 47	Turun 148
Kekonvergenan	Nyaris dimana-mana 70
Monoton 153	

Operator

Adjoint 180

Identitas 173, 176

Integral 176

Kompak 183

Kompak lemah 186

Kontinu 178

Linear 171

Nol 173, 176

Terbatas 175

Partisi

Lebesgue 61

Perron 61

Penutup 1, 2

Primitif

Dunford 120

McShane 82

Ruang

Banach 41

Bernorma 27

Dual 58

Metrik 31

Sel 2

Sifat Cauchy 166

Terukur

Himpunan 3, 8

Fungsi

Titik

Batas 1, 2

Dalam 1, 2

Limit 1, 2

Teorema

Lusin's 73

Riez 113

Tiezte Extension 72

Tumpang-tindih 3

ISBN 978-623-5509-40-2



9 786235 509402