

Metode Kendali Diskrit Teori dan Simulasinya

by R. Heru Tjahjana

Submission date: 21-Nov-2020 09:55AM (UTC+0700)

Submission ID: 1452944700

File name: C1.BUKU_MONOGRAF.pdf (5.61M)

Word count: 20678

Character count: 111293



METODE KENDALI DISKRET

TEORI DAN SIMULASINYA

**WIDOWATI
R. HERU TJAHJANA
SUTRISNO**

**METODE KENDALI DISKRET:
TEORI DAN SIMULASINYA**

NO. ISBN. 978-979-097-463-0

Oleh :

**WIDOWATI
R. HERU TJAHJANA
SUTRISNO**

**Penerbit: UNDIP PRESS
2017**

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Kuasa atas segala karunia-Nya yang telah dilimpahkan kepada penulis sehingga kami dapat menyusun buku yang berjudul **Metode Kendali Diskret: Teori dan Simulasinya** ini. Buku ini ditulis dengan harapan dapat memenuhi kriteria buku referensi berbasis riset. Materi-materi yang termuat di dalam buku ini merupakan hasil *research professorship program*, yang dirancang dalam waktu dua tahun (2016-2017) dari dana PNBP Universitas Diponegoro, Semarang.

Buku ini disusun dengan penyajian, dimulai dengan pengenalan konsep sistem dinamik diskrit kemudian dipaparkan tentang analisis kestabilannya. Dibahas juga sistem kendali diskret chaos, sistem dinamik prediktif, sistem dinamik hibrid, dan model dinamik dengan parameter random. Terakhir, disajikan simulasi numerik di bidang industri manufaktur. Pada permasalahan nyata, fenomena perubahan terhadap waktu dapat dikonstruksi menjadi model matematika dalam bentuk model dinamik. Fenomena perubahan ini terjadi di berbagai bidang. Oleh karena itu, buku ini dapat digunakan oleh banyak kalangan bidang ilmu, seperti Matematika, Fisika, Ekonomi, Teknik (Rekayasa), maupun kalangan industri.

Buku ini terdiri dari lima bab yaitu pada bab 1 dibahas tentang pengertian umum sistem diskrit, analisis kestabilan dalam arti Lyapunov, dan pengenalan teori chaos. Pada bab 2 dikemukakan sistem diskrit chaos, hukum kendali impulsif, penstabilan sistem diskrit chaos, dan simulasi numerik pendisainan pengendali impulsif. Model ruang keadaan pada rantai pasokan, sistem dinamik prediktif, sistem dinamik prediktif ekonomik, sistem dinamik prediktif dua tujuan, dan kestabilan, serta simulasi numerik dipaparkan pada bab 3. Selanjutnya pada bab 4 disajikan model dinamik hibrid dan kendalinya yang meliputi sistem dinamik berbasis logika campuran, kendali prediktif untuk MLD, model dinamik berbasis optimasi dan kendalinya. Diberikan juga simulasi numerik baik untuk model hibrid maupun model piecewise-objective di industri manufaktur. Terakhir pada bab 5 diberikan model dinamik dengan parameter random yaitu yang berkaitan formulasi model dan kendali optimal dengan parameter random serta simulasi model dengan parameter random di industri manufaktur.

⁷ Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada Ketua LPPM Universitas Diponegoro yang telah memberikan dana hibah *research professorship program* dan kesempatan untuk mengembangkan ilmu pengetahuan. ⁴¹ Selain itu, penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Rektor UNDIP Semarang yang telah memberikan kepercayaan dan pembinaan sehingga penulis mampu mengembangkan diri dibidang penelitian. Kepada Ketua Departemen Matematika Universitas Diponegoro Semarang dan rekan-rekan sejawat dalam tim penelitian, juga kepada Okky, Yuliyani, ⁶⁴ Yehezkiel, Aditya, Indah, Sofi, penulis menyampaikan terima kasih atas kerja sama yang terjalin dengan baik serta keluarga yang telah memberikan motivasi sehingga buku ini dapat diselesaikan. Semoga ⁶³ buku Metode Kendali Diskrit: Teori dan Simulasinya di Bidang Industri Manufaktur ini dapat bermanfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Semarang, September 2017

Penulis

HALAMAN JUDUL	i
KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iv
BAB 1. Sistem Dinamik Diskrit	1
1.1. Bentuk Umum Sistem Diskrit	1
1.2. Analisis Stabilitas	3
1.2.1 Kestabilan dalam Arti Lyapunov.....	6
1.2.2 Fungsi Skalar	7
1.2.3 Analisis Stabilitas Sistem LTI Waktu Diskrit	10
1.3. Keterkendalian Sistem Diskret	10
1.4. Keteramatan Sistem Diskret.....	12
1.5. Kestabilan Sistem Diskret	15
1.6. Pengenalan Teori Chaos	15
BAB 2. Sistem Kontrol Diskrit Chaos	17
2.1 Sistem Diskrit Chaos	17
2.2 Hukum Pengendali Impulsif	18
2.3 Penstabilan Sistem Diskrit Chaos	20
2.4 Simulasi Pendesainan Pengendali Impulsif	29
BAB 3. Model Dinamik Prediktif	35
3.1 Model Ruang Keadaan pada Rantai Pasokan	35
3.2 Model kendali Prediktif (MPC).....	38
3.3 Model Kendali Prediktif Ekonomik	40
3.4 Model Kendali Prediktif Dua Tujuan	41
3.5 Simulasi Numerik Pendisainan <i>Bi-objective</i> MPC	43
BAB 4. Model Dinamik Hibrid dan Kendalinya	48
4.1 Sistem Dinamik Berbasis Logika Campuran	48
4.2 Kendali Prediktif untuk MLD	53
4.3 Simulasi Model Hibrid di Industri Manufaktur	54
4.4 Model Dinamik Berbasis Optimasi dan Kendalinya	67
4.4.1 Model dengan Piecewise-Objective	70

4.4.2 Kendali Optimal untuk Model Piecewise-Objective	75
4.4.3 Simulasi Model Piecewise-Objective di Industri Manufaktur....	76
BAB 5. Model Dinamik dengan Parameter Random	82
5.1 Formulasi Model dengan Parameter Random.....	82
5.2Kendali Optimal dengan Parameter Random	89
5.3. Simulasi Model dengan Parameter Random di Industri Manufaktur	90
DAFTAR PUSTAKA.....	106
INDEKS	113

BAB 1. SISTEM DINAMIK DISKRIT

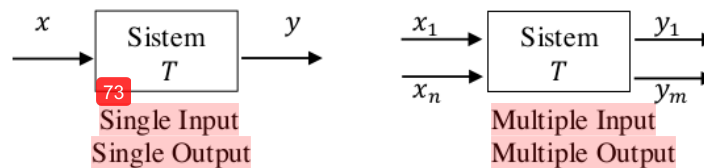
Pada bab ini diberikan tentang pengertian dasar yang berkaitan dengan sistem dinamik diskrit, kestabilan Lyapunov, fungsi skalar, keterkendalian sistem, dan keteramatan sistem.

1.1. Bentuk Umum Sistem Diskrit

Sistem merupakan model matematika dari suatu proses fisis yang berkaitan dengan sinyal masukan(input) dengan sinyal keluaran (output). Misalkan x dan y adalah signal input dan output dari suatu sistem. Maka sistem dapat dipandang sebagai suatu transformasi (pemetaan) dari x pada y . Transformasi ini disajikan oleh notasi matematik sebagai berikut,

$$y = Tx, \quad (1.1)$$

dengan T adalah suatu operator. Persamaan (2.1) dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 1.1 Skema dari sistem

Suatu sistem dikatakan sistem waktu diskrit bila input $x[n]$ dan output $y[n]$ adalah signal diskrit. Sedangkan suatu sistem dikatakan invarian waktu bila tetap terhadap pergeseran, yaitu

$$T(x[n - k]) = y[n - k], \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (1.2)$$

apabila tidak memenuhi persamaan (1.2) dinamakan sistem varian waktu.

Secara umum bentuk persamaan ruang keadaan sistem waktu diskrit dinyatakan sebagai berikut

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (1.3)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k), \quad (1.4)$$

dengan $x(k)$ adalah vektor keadaan, $u(k)$ adalah vektor masukan dan $y(k)$ adalah vektor keluaran, masing-masing ditentukan pada $t = kT, k = 0, 1, \dots$, dan T adalah periode cacah. Penyelesaian dari persamaan (1.3) untuk setiap $k > 0$ dapat diperoleh secara langsung dengan rekursi, dan diperoleh

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j), \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.5)$$

jelas bahwa $x(k)$ terdiri dari dua bagian, satu menyatakan kontribusi dari syarat awal $x(0)$, dan yang lain adalah kontribusi dari masukan $u(j), j = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

Persamaan (1.5) menunjukkan matriks transisi keadaan dari sistem yang dinyatakan oleh persamaan (1.3) adalah

$$\Phi(k) = G^k \quad (1.6)$$

matriks tersebut merupakan matriks unik yang memenuhi

$$\Phi(k+1) = G\Phi(k), \quad \Phi(0) = I \quad (1.7)$$

dalam bentuk matriks transisi keadaan $\Phi(k)$, persamaan (2.5) dapat ditulis

$$x(k) = \Phi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)Hu(j) \quad (1.8)$$

$$= \Phi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(j)Hu(k-j-1) \quad (1.9)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (1.8) atau (1.9) ke dalam persamaan (1.4), maka persamaan keluaran dapat dituliskan sebagai berikut;

$$\begin{aligned} y(k) &= C\Phi(k)x(0) + C \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)Hu(j) + D(u) \\ &= C\Phi(k)x(0) + C \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(j)Hu(k-j-1) + D(u) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Selanjutnya diberikan penjelasan mengenai analisis kestabilan *Lyapunov* pada definisi-definisi berikut.

1.2. Analisis Stabilitas dengan Metode Lyapunov

Stabilitas sistem kontrol merupakan hal penting yang harus ditentukan. Di mana ⁷² terdapat berbagai macam metode yang dapat dipakai dalam menentukan kestabilan sistem, namun disini hanya membahas bagaimana menggunakan atau menerapkan teori stabilitas *Lyapunov* dalam menentukan kestabilan sistem.

Sebelum membahas teori stabilitas *Lyapunov*, terlebih dahulu akan diberikan penjelasan mengenai keadaan kesetimbangan.

Berikut sistem yang digunakan dalam hal ini didefinisikan sebagai berikut;

$$x(m+1) = f(x(m)) \quad (1.11)$$

dengan x adalah vektor keadaan, $f(x(m))$ adalah fungsi kontinu dan $\Phi(x(m_0))$ adalah solusi persamaan (1.11), di mana $x(m_0) = x_0$ pada saat $m = m_0$ dan m adalah waktu pengamatan.

Pada persamaan (1.11), suatu keadaan x_e dengan

$$f(x_e(m)) = 0, \text{ untuk setiap } m, \quad (1.12)$$

disebut sebagai keadaan kesetimbangan dari sistem. Jika sistem tersebut adalah linear parameter konstan, misal $f(x(m)) = Ax$, maka hanya ada satu keadaan kesetimbangan jika A nonsingular, dan ada tak terhingga keadaan keseimbangan jika A singular. Untuk keadaan sistem nonlinear, mungkin ada satu atau lebih keadaan kesetimbangan. Keadaan ini berkaitan dengan solusi konstan dari sistem ($x = x_e$ untuk setiap m). Penentuan keadaan kesetimbangan ini tidak melibatkan solusi sistem persamaan (1.11) tetapi hanya solusi persamaan (1.12).

Selanjutnya diberikan uraian mengenai kestabilan dalam arti *Lyapunov* dari sistem dinamik. Misalkan diberikan daerah *sferis* dengan jari-jari k di sekitar keadaan kesetimbangan x_e seperti dibawah ini

$$\|x - x_e\| \leq k,$$

dengan $\|x - x_e\|$ disebut norm *euclides* dan didefinisikan sebagai

$$\|x - x_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \cdots + (x_n - x_{ne})^2]^{\frac{1}{2}},$$

andaikan $S(\delta)$ terdiri dari semua titik sedemikian sehingga

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta,$$

dan misalkan $S(\varepsilon)$ terdiri dari semua titik sedemikian sehingga

$$\|\Phi(x(m_0)) - x_e\| \leq \varepsilon \text{ untuk semua } t \geq t_0,$$

maka keadaan kesetimbangan x_e dari sistem pada persamaan (1.11) disebut stabil dalam arti *Lyapunov* jika untuk setiap $S(\varepsilon)$, ada $S(\delta)$ sedemikian sehingga trayektori yang mempunyai titik awal di dalam $S(\delta)$ tidak meninggalkan $S(\varepsilon)$ dengan membesarnya waktu m menuju tak terhingga. Bilangan nyata δ bergantung pada ε dan pada umumnya juga bergantung pada t_0 . Jika δ tidak bergantung pada t_0 , maka keadaan kesetimbangan tersebut disebut stabil secara uniform.

Jadi pertama dipilih daerah $S(\varepsilon)$, di mana untuk setiap $S(\varepsilon)$, harus ada daerah $S(\delta)$ sedemikian sehingga trayektori yang bertitik awal di dalam $S(\delta)$ tidak meninggalkan $S(\varepsilon)$ jika m membesar menuju tak hingga.

Definisi di bawah ini berkaitan dengan jenis-jenis kestabilan pada sistem dinamik.

Definisi 1.1. a. Kestabilan Asimtotik

Keadaan kesetimbangan x_e dari sistem (1.12) disebut stabil asimtotik jika keadaan tersebut stabil dalam arti *Lyapunov* dan jika setiap solusi yang bertitik awal di dalam $S(\delta)$ tanpa meninggalkan $S(\varepsilon)$, konvergen ke x_e dengan membesarnya m menuju tak terhingga.

Definisi 1.1.b. Kestabilan Asimtotik Global

Jika kestabilan asimtotik berlaku untuk semua keadaan (semua titik dalam ruang keadaan) titik awal trayektori, maka keadaan kesetimbangan tersebut disebut stabil asimtotik global. Jadi keadaan kesetimbangan x_e dari sistem (1.12) disebut stabil asimtotik global jika keadaan kesetimbangan tersebut stabil dan jika setiap solusi

konvergen ke x_e dengan membesarnya m menuju tak terhingga. Jadi syarat yang perlu untuk kestabilan asimtotik global adalah bahwa hanya ada satu keadaan kesetimbangan dalam seluruh ruang keadaan. Selanjutnya diberikan konsep dasar yang berkaitan dengan fungsi skalar

Definisi 1.2. Fungsi Skalar Definit Positif

Fungsi skalar $V(x)$ disebut definit positif dalam suatu daerah Ω (yang mencakup titik asal ruang keadaan) jika $V(x) > 0$ untuk semua keadaan x yang berharga tidak nol dalam daerah Ω dan $V(0) = 0$.

Fungsi parameter berubah $V(x, t)$ disebut definit positif dalam suatu daerah Ω (yang mencakup titik asal ruang keadaan) jika terbatas di bawah oleh fungsi parameter konstan definit positif, yaitu jika ada fungsi definit positif $V(x)$ sedemikian sehingga $V(x, t) > V(x)$ untuk semua $t \geq t_0$, dan $V(0, t) = 0$ untuk semua $t \geq t_0$.

Definisi 1.3. Fungsi Skalar Definit Negatif

Fungsi skalar $V(x)$ disebut definit negatif jika $-V(x)$ definit positif.

Definisi 1.4. Fungsi Skalar Semidefinit Positif

Fungsi skalar $V(x)$ disebut semidefinit positif jika fungsi tersebut berharga positif di semua keadaan daerah Ω kecuali dititik asal/awal dan disuatu keadaan lain, di mana fungsi tersebut berharga nol.

Definisi 1.5. Fungsi Skalar Semidenifit Negatif

Fungsi skalar $V(x)$ disebut semidefinit negatif jika $-V(x)$ definit positif.

Contoh 1.1.

Diberikan $V(x)$ sebagai berikut

$$V(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

dengan menggunakan kriteria *Sylvester*, diperoleh

$$10 > 0, \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} > 0 \text{ dan } \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0,$$

karena semua minor utama berurutan dari matriks P adalah positif, maka $V(x)$ definit positif.

Selanjutnya, diuraikan analisis stabilitas *Lyapunov* untuk sistem waktu diskrit. Kestabilan asimtotik merupakan konsep penting dalam konsep kesetimbangan sistem. Berikut akan diberikan teorema stabilitas sistem waktu diskrit linier atau nonlinear berdasarkan metode kedua *Lyapunov*. Sebelumnya untuk sistem waktu diskrit, sebagai pengganti $\dot{V}(x)$, akan digunakan differensi antara $V(x(k+1)T) - V(x(kT))$, atau

$$\Delta V(x(kT)) = V(x(k+1)T) - V(x(kT)). \quad (1.13)$$

Teorema 1.2. Stabilitas Lyapunov Sistem Waktu Diskrit

Perhatikan sistem waktu diskrit sebagai berikut:

$$x((k+1)T) = f(x(kT)),$$

dengan x adalah vektor keadaan (n -vektor), $f(x)$ adalah n -vektor dimana $f(0) = 0$ dan T adalah periode sampling. Misalkan ada suatu fungsi skalar $V(x)$ kontinu di x sehingga

1. $V(x) > 0$, untuk $x \neq 0$,
2. $\Delta V(x) < 0$, untuk $x \neq 0$, dimana

$$\Delta V(x(kT)) = V(x(k+1)T) - V(x(kT)) = V(f(x(kT))) - V(x(kT)),$$

3. $V(0) = 0$, untuk $x = 0$
4. $V(x) \rightarrow \infty$, saat $\|x\| \rightarrow \infty$,

maka titik kesetimbangan $x = 0$ adalah stabil asimtotik uniform (seragam), dengan $V(x)$ adalah fungsi *Lyapunov*.

Perlu diketahui bahwa kondisi 2 dalam teorema tersebut dapat diganti dengan $\Delta V(x) \leq 0$, untuk setiap x , dan $\Delta V(x)$ tidak menjadi nol sepanjang setiap solusi berurut $\{x(kT)\}$ yang memenuhi persamaan (1.13), ini berarti bahwa $\Delta V(x)$ tidak perlu definit negatif, atau cukup semidefinit negatif maka keadaan kesetimbangan di titik asal dari sistem adalah stabil asimtotik global secara uniform.

Selanjutnya dijelaskan stabilitas *Lyapunov* dari sistem waktu diskrit LTI yang dinyatakan dalam bentuk:

$$x(k+1) = Gx(k) \tag{1.14}$$

dengan x adalah vektor keadaan dan G adalah matriks konstan nonsingular $n \times n$. Titik $x = 0$ merupakan titik kesetimbangan. Dalam rangka menyelidiki kestabilan sistem, pandang fungsi *Lyapunov* yang dinyatakan dalam bentuk

$$V(x(k)) = x^T(k)Px(k),$$

dengan P adalah matriks Hermitian definit positif (atau real simetriks). Dengan mengingat bahwa untuk sistem waktu diskrit, sebagai pengganti $\dot{V}(x)$, digunakan diferensi antara $V(x(k+1))$ dan $V(x(k))$, atau

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)),$$

yang analog dengan turunan dari $V(x)$, maka

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) \\ &= [Gx(k)]^T P[Gx(k)] - x^T(k)Px(k) \\ &= x^T(k)G^T P G x(k) - x^T(k)Px(k) \\ &= x^T(k)(G^T P G - P)x(k), \end{aligned}$$

karena $V(x(k))$ adalah definit positif, maka agar keadaan kesetimbangan stabil asimtotik, memerlukan persyaratan bahwa $\Delta V(x(k))$ harus definit negatif. Oleh karena itu

$$\Delta V(x(k)) = -x^T(k)Qx(k), \quad \text{dengan} \quad Q = -(G^T P G - P) > 0,$$

sehingga, untuk kestabilan asimtotik sistem waktu diskrit yang dinyatakan oleh persamaan (1.12), cukup jika $V(x(k))$ definit positif dan $\Delta V(x(k)) = -x^T$ definit negatif. Cara lainnya adalah dengan memilih suatu matriks Hermitian definit positif Q dan kemudian memeriksa apakah matriks P yang ditentukan dari

$$G^T P G - P = -Q,$$

definit positif atau bukan. Ingat bahwa P definit positif merupakan syarat perlu.

Teorema 1.3 Stabilitas Lyapunov LTI Sistem Waktu Diskrit

Diberikan sistem waktu diskrit sebagai berikut:

$$x(k+1) = Gx(k)$$

dengan x adalah vektor keadaan dan G adalah matriks konstan nonsingular $n \times n$. Syarat perlu dan cukup agar keadaan kesetimbangan $x = 0$ stabil asimtotik adalah bahwa jika dipilih suatu matriks Hermitian definit positif Q , terdapat suatu matriks Hermitian definit positif P sedemikian sehingga $G^T P G - P = -Q$, fungsi skalar $x^T P x$ adalah fungsi *Lyapunov* sistem ini. Jika $\Delta V(x(k)) = -x^T(k) Q x(k)$ tidak menjadi nol sepanjang setiap solusi maka Q dapat dipilih berupa matriks semidefinit positif.

1.3. Keterkendalian Sistem Diskret

Pada subbagian ini diberikan menjelaskan tentang sifat keterkendalian sistem diskret.

Perhatikan sistem kontrol diskrit yang disajikan oleh persamaan :

$$x((k+1)T) = Gx(kT) + Hu(kT) \quad (1.15)$$

dengan

$x(kT)$: vektor keadaan pada periode ke- k berupa vektor n

$u(kT)$: sinyal kendali pada periode ke- k

G : matriks keadaan berukuran $n \times n$

H : matriks kendali berukuran $n \times 1$

T : periode sampling

$u(kT)$ diasumsikan konstan untuk $kT \leq t < (k+1)T$

Definisi 1.6. Sistem diskrit (1.3) dikatakan terkendali secara lengkap apabila terdapat suatu sinyal kontrol $u(kT)$ sepanjang periode sampling sehingga dapat membawa keadaan $\mathbf{x}(kT)$ ke keadaan yang diinginkan, sebut $\mathbf{x}_f$ pada n periode sampling.

Dari definisi tersebut dapat dijelaskan bahwa kondisi yang harus dipenuhi untuk keterkendalian adalah sebagai berikut. Solusi untuk persamaan (1.15) adalah:

$$\begin{aligned} x(nT) &= G^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} H u(jT) \\ &= G^n x(0) + G^{n-1} H u(0) + G^{n-2} H u(T) + \dots + H u((n-1)T) \end{aligned}$$

diperoleh

$$x(nT) - G^n x(0) = \begin{bmatrix} H & GH & \dots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u((n-1)T) \\ u((n-2)T) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

karena H merupakan matriks $n \times 1$, matriks $\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}$ adalah matriks $n \times 1$ atau vektor kolom. Jika rank dari matriks

$$\text{rank} \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} = n \quad (1.16)$$

maka vektor sebanyak n , yaitu $\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}$ membangun ruang dimensi- n sehingga definisi keterkendalian telah terpenuhi. Matriks $K = \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}$ disebut juga sebagai matriks keterkendalian.

1.4. Keteramatan Sistem Diskret

Keteramatan berkaitan dengan masalah menentukan keadaan dari sistem dinamik berdasarkan pengamatan keluaran dan vektor kontrol dalam jangka waktu tertentu. Suatu sistem dikatakan teramati jika keadaan awal sistem dapat ditentukan berdasarkan pengamatan keluaran dan vektor kontrol selama selang waktu tertentu. Konsep keteramatan berguna dalam merekonstruksi variabel keadaan yang tidak diketahui.

Misalkan sebuah sistem kontrol diskrit dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{cases} x((k+1)T) = Gx(kT) + Hu(kT) \\ y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \end{cases}$$

Sistem tersebut mempunyai penyelesaian :

$$x(kT) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(jT) \quad (1.17)$$

dan

$$\mathbf{y}(kT) = CG^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} CG^{k-j-1} H \mathbf{u}(jT) + D \mathbf{u}(kT) \quad (1.18)$$

Karena matriks G , H , C , D dan $\mathbf{u}(kT)$ diketahui, bagian kanan pada persamaan (1.17) serta bagian tengah dan kanan pada persamaan (1.18) juga diketahui. Sehingga ketiga bagian tersebut dapat dihilangkan dari nilai pengamatan $\mathbf{y}(kT)$. Sistem untuk menurunkan kondisi keteramatan dapat disederhanakan menjadi :

$$\mathbf{x}((k+1)T) = G\mathbf{x}(kT) \quad (1.19)$$

$$\mathbf{y}(kT) = C\mathbf{x}(kT) \quad (1.20)$$

dengan

$\mathbf{x}(kT)$: vektor keadaan pada periode ke- k berupa vektor n

$\mathbf{y}(kT)$: vektor keluaran pada periode ke- k berupa vektor m

G : matriks kendali berukuran $n \times n$

C : matriks kendali berukuran $m \times n$

Sistem di atas teramati secara total jika keluaran $\mathbf{y}(kT)$ diketahui, keadaan awal $\mathbf{x}(0)$ dapat dicari. Solusi untuk persamaan (1.19) adalah :

$$\mathbf{x}(kT) = G^k \mathbf{x}(0)$$

dengan substitusi ke persamaan (1.20) diperoleh

$$\mathbf{y}(kT) = CG^k \mathbf{x}(0) .$$

Keadaan awal $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ tidak diketahui dan akan dicari. Untuk menentukan n buah nilai, nilai $\mathbf{y}(kT)$ yang diperlukan hanya sebanyak n . Sehingga

nilai $y(kT)$ yang digunakan $y(0), y(T), \dots, y((n-1)T)$ untuk mencari nilai $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$.

Untuk sistem yang teramati secara total diberikan

$$\begin{aligned} y(0) &= Cx(0) \\ y(T) &= CGx(0) \\ &\vdots \\ y^{n-1}((n-1)T) &= CG^{n-1}x(0) \end{aligned}$$

$x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ harus dapat ditentukan. Karena $y(kT)$ adalah vektor berukuran m dan dari $x(0)$ mempunyai nilai n persamaan maka diperoleh nm persamaan yang mengandung $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Agar solusi $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ dari nm persamaan tersebut unik, haruslah ada n persamaan bebas linier di dalamnya. Matriks

$$\begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}$$

harus mempunyai rank sebesar n . Matriks di atas dapat juga dinyatakan sebagai :

$$O = \begin{bmatrix} C^* & G^*C^* & \dots & (G^*)^{n-1}C^* \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Matriks pada persamaan (1.21) disebut juga matriks keteramatan.

1.5. Keterstabilan Sistem Diskrit LTI

Pada subbagian ini diuraikan konsep dasar yang berkaitan dengan definisi dan teorema tentang sifat keterstabilan sistem diskret

Definisi 1.7. Sistem (1.3) atau pasangan matriks (G, H) , dikatakan terstabilkan jika terdapat matriks F sedemikian sehingga semua nilai eigen dari $G+HF$ dapat ditempatkan di open unit disc, yaitu daerah di bidang kompleks yang memiliki modulus kurang dari satu.

Berdasarkan definisi sebelumnya maka syarat sistem yang tidak terkendali supaya dapat dikendalikan adalah sistem terstabilkan, yaitu semua nilai eigen sistem dapat ditempatkan di open unit disc. Teorema berikut dapat digunakan untuk menyelidiki sifat keterstabilan sistem.

Teorema 1.4 Sistem (1.3) atau pasangan matriks (G, H) , bersifat terstabilkan jika dan hanya jika

$$\text{rank}[\mu I - G \ H] = n$$

untuk semua nilai eigen μ_i dari G dengan $|\mu_i| \geq 1, i = 1, 2, \dots, k \leq n$.

Selanjutnya diberikan pengantar mengenai teori chaos sebagai berikut.

1.6. Pengenalan Teori Chaos

1

Sistem yang berpotensi memiliki dinamik *chaotic* adalah sistem disipatif. Pada bidang rekayasa sistem ini memiliki ciri yaitu munculnya secara spontan *anisotropy* yang diakibatkan oleh interaksi antara partikel (massa) untuk rentang waktu yang panjang. Dari sudut pandang sistem dinamik, suatu sistem adalah

disipatif jika *phase-flow* atau orbit-orbit dari sistem tersebut divergen negatif. Suatu sistem yang disipatif tidak memiliki titik-titik kritis atau solusi periodik dengan atraktor negatif (*negative attaractor*).

BAB 2. SISTEM KENDALI DISKRET CHAOS

Pada bagian ini dibahas tentang bagaimana mendesain sistem diskrit chaos berdasarkan hukum pengendali impulsif dan diberikan simulasi dengan menggunakan software MATLAB R2008a, sehingga dapat diketahui perbedaan kinerja pada sistem diskrit chaos lup terbuka (sebelum diberikan pengendali impulsif) dan lup tertutup (setelah diberi pengendali impulsif).

2.1. Sistem Diskret Chaos

Perhatikan, beberapa notasi yang digunakan pada kajian sistem kendali diskrit. Diberikan himpunan $\widehat{\mathbb{Z}} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dan $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, untuk $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}^T \in \mathbb{R}^n$ dan $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, diberikan norm $\|x\|$ adalah norm vektor dan $\|A\|$ adalah norm dari matriks A , dengan $\rho(A)$ adalah spektral radius matriks A , didefinisikan;

$$\|x\|_1 = \sum_i^n |x_i| \text{ dan } \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_i^n |a_{ij}|.$$

Bentuk umum dari sistem diskrit chaos direpresentasikan dalam bentuk

$$x(m+1) = f(x(m)), m \in \widehat{\mathbb{Z}}, \quad (2.1)$$

Sistem (2.1) disebut sebagai sistem diskrit chaos lup terbuka, dengan $x(m) \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel keadaan, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah fungsi kontinu dengan $x(0) = x_0$ adalah kondisi awal, dan diberikan plant P yang mendefinisikan proses evolusi $(m, x(m))$, dengan $x(m) \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel keadaan dari sistem.

Sistem diskrit chaos merupakan sistem dengan masukan dan keluaran waktu diskrit yang memiliki perilaku chaos (trayektori yang tidak beraturan) ditunjukkan dengan ketergantungan yang peka terhadap kondisi awal yang mana perubahan kecil pada satu tempat dalam sistem dapat mengakibatkan perubahan

besar dalam keadaan kemudian, atau disebut tidak dapat diprediksi pada jangka waktu yang lama.

2.2. Hukum Pengendali Impulsif

Pendesainan sistem diskrit chaos berdasarkan hukum pengendali impulsif untuk menstabilkan sistem diberikan pada subagian ini. Perhatikan kriteria hukum pengendali impulsif pada Definisi 2.1 di bawah ini.

Definisi 2.1

Barisan $\{m_k, U(k, x(m_k))\}$, $m_k \in \mathbb{Z}$ dikatakan sebagai hukum pengendali impulsif dari plant P jika;

- i. $\Delta x(m_k) = x(m_k + 1) - x(m_k) = U(k, x(m_k)), k \in \mathbb{N}$.
- ii. $m_0 = 0 < m_1 < m_2 < \dots < m_k < m_{k+1} < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \infty$.

Pendesainan pengendali impulsif $\{m_k, U(k, x(m_k))\}$ untuk sistem (2.1) sehingga sistem stabil eksponensial.

Diberikan $U(k, x(m_k)) = \Phi_k(x(m_k)), \Phi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah fungsi kontinu. Telah diketahui bentuk persamaan (2.1) adalah sebagai berikut

$$x(m+1) = f(x(m)), m \in \mathbb{Z},$$

dengan $\{m_k, U(k, x(m_k))\}$ sebagai pengendali impulsif jika memenuhi syarat-syarat seperti pada Definisi 2.1. Kemudian, substitusikan $U(k, x(m_k)) = \Phi_k(x(m_k))$ ke persamaan (i) sehingga didapat

$$\Delta x(m_k) = x(m_k + 1) - x(m_k) = \Phi_k(x(m_k)), m = m_k, k \in \mathbb{N},$$

dengan nilai awalnya adalah

$$x(0) = x_0.$$

Slanjutnya dapat diperoleh sistem diskrit chaos berdasarkan hukum pengendali impulsif sebagai berikut:

$$\begin{cases} x(m+1) = f(x(m)), & m \neq m_k, & m \in \widehat{\mathbb{Z}} \\ \Delta x(m) = x(m+1) - x(m) = \Phi_k(x(m)), & m = m_k, & k \in \mathbb{N} \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) disebut sebagai sistem diskrit chaos lup tertutup yang memenuhi asumsi di bawah ini

Asumsi :

1. Terdapat konstanta $s > 0$ dan $\vartheta \geq 0$ sehingga

$$\|f(x(m))\| \leq s\|x(m)\| + \vartheta, \quad \forall m \in \widehat{\mathbb{Z}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

2. Terdapat konstanta $l_k > 0$ sehingga

$$\|x(m) + \Phi_k(x(m))\| \leq l_k \|x(m)\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

3. Pengendali impulsif dengan *time* instan $\{m_k\}$, $m_k \in \widehat{\mathbb{Z}}$, memenuhi

$$m_k - m_{k-1} > 1, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Dalam kajian tentang sistem chaos, kondisi *Lipschitz* merupakan syarat cukup yang harus dipenuhi. Asumsi 1 menyiratkan kondisi *Lipschitz* yang mana $f(x)$ memenuhi kondisi *Lipschitz* sebagai berikut;

$$\|f(x) - f(0)\| \leq s\|x\| \Rightarrow \|f(x)\| \leq s\|x\| + \|f(0)\|.$$

Asumsi 2 merupakan asumsi yang paling umum digunakan untuk sistem pengendali impulsif. Sehingga jelas jika $\Phi_k(0) = 0$, maka kondisi *Lipschitz* adalah kondisi yang cukup untuk Asumsi 2. Bahkan, Secara umum tidak ada yang menjamin Asumsi 3 atau *jumping impulses* terjadi terus menerus.

Definisi-definisi berikut diperlukan dalam proses penstabilan sistem

diskret chaos.

Definisi 2.2. Himpunan $S \subset \mathbb{R}^n$ dikatakan *globally exponentially attracting set* dari sistem (2.2) jika terdapat konstanta $K > 0$ dan $\beta \in [0,1)$ sehingga untuk setiap solusi $x(m, 0, x_0)$ dengan nilai awal x_0 ,

$$\text{dist}(x(m), S) \leq K \|x_0\| \beta^k,$$

dengan $k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty$ ketika $m \rightarrow \infty$, dan

$$\text{dist}(x(m), S) = \inf_{y \in S} d(x(m), y),$$

dengan $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ adalah jarak di $\mathbb{R}^n$.

Definisi 2.3. Sistem (2.2) dikatakan *globally exponentially set-stable* jika terdapat *globally exponentially attracting set* S dari sistem (2.2).

Definisi 2.4. Sistem (2.2) dikatakan *globally exponentially stable* jika $S = \{0\}$ adalah *globally exponentially attracting set* dari sistem (2.2).

2.3. Penstabilan Sistem Diskrit Chaos

Teorema yang diberikan pada bagian ini berkaitan dengan penstabilan sistem. Beberapa kondisi stabilitas eksponensial global dapat diperoleh untuk pengendali impulsif sistem diskrit chaos (2.2) dengan menggunakan teori kestabilan *Lyapunov*.

Teorema 2.1.

Misalkan Asumsi 1-3 terpenuhi. Maka solusi dari sistem (2.2) memenuhi kriteria berikut:

$$\|x(m)\| \leq s^{m-k-1} \prod_{i=0}^k l_i \|x_0\| + \gamma, \quad (2.6)$$

dengan

$$\gamma = \sum_{i=0}^{m-m_k-2} s^i \vartheta + \sum_{j=1}^k s^{m-m_j-(k-j)-1} \prod_{i=j}^k l_i \left(\sum_{i=0}^{m_j-m_{j-1}-2} s^i \right) \vartheta. \quad (2.7)$$

Bukti

Perhatikan dari sistem (2.2) dipunyai

$$\Delta x(m_k) = x(m_k + 1) - x(m_k) = \Phi_k(x(m_k)), \quad m = m_k, k \in \mathbb{N},$$

Persamaan di atas ekuivalen dengan

$$x(m_k + 1) = x(m_k) + \Phi_k(x(m_k)),$$

sehingga dapat diperoleh

$$x(m_k) \leq x(m_k + 1),$$

dan

$$\|x(m_k)\| \leq \|x(m_k + 1)\| \quad \text{atau} \quad \|x(m)\| \leq \|x(m_k + 1)\|,$$

akibatnya untuk $m \in (m_k, m_{k+1}]$, kemudian dihitung norm $\|x(m)\|$ untuk

$m \neq m_k$, yaitu

$$\|x(m)\| \leq \|x(m_k + 1)\|,$$

kemudian berdasarkan Asumsi 3.1, dapat dibentuk

$$\|x(m)\| \leq \|x(m_k + 1)\| \leq s\|x(m_k + 1)\| + \vartheta,$$

dengan konstanta $s > 0$ dan $\vartheta \geq 0$,

sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned}\|x(m)\| &\leq s\|x(m_k + 1)\| + \vartheta \\ &\leq s^{m-m_k-1} \|x(m_k + 1)\| + (1 + s + s^2 + \dots + s^{m-m_k-2})\vartheta,\end{aligned}$$

Hal ini dikarenakan

$$x(m_k + 1) = x(m_k) + \Phi_k(x(m_k)),$$

maka

$$\|x(m)\| \leq s^{m-m_k-1} \|x(m_k) + \Phi_k(x(m_k))\| + \left(\sum_{i=0}^{m-m_k-2} s^i \right) \vartheta.$$

Selanjutnya berdasarkan Asumsi 2 yaitu

$$\|x(m_k) + \Phi_k(x(m_k))\| \leq l_k \|x(m_k)\|, \quad \forall k \in N, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

dapat diperoleh

$$\|x(m)\| \leq s^{m-m_k-1} l_k \|x(m_k)\| + \left(\sum_{i=0}^{m-m_k-2} s^i \right) \vartheta. \quad (2.8)$$

Karena $m \in (m_k, m_{k+1}]$, maka untuk $m = m_{k+1}$ juga berlaku sama yaitu:

$$\|x(m_{k+1})\| \leq s^{m_{k+1}-m_k-1} l_k \|x(m_k)\| + \left(\sum_{i=0}^{m_{k+1}-m_k-2} s^i \right) \vartheta, \quad (2.9)$$

maka m_{k+1} bernilai benar.

Selanjutnya dengan induksi, dapat diperoleh $\|x(m_k)\|$ yang sesuai. Karena $m \in (m_k, m_{k+1}]$, hal ini mengindikasikan bahwa $m \neq m_k$, yang berakibat untuk menghitung nilai dari norm $\|x(m_k)\|$ tidak dapat menggunakan m_k , dan berdasarkan Definisi 2.1, yaitu diketahui

$$m = m_{k-1} < m_k < m_{k+1},$$

Hal ini berarti nilai m_k dapat diganti menggunakan nilai dari m_{k-1} , sebab nilai dari m_{k+1} telah terdefinisi sebelumnya. Dengan kata lain

$$\|x(m_k)\| = \|x(m_{k-1})\|,$$

Dan dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \|x(m_{k-1})\| &\leq s^{m_k-k} \prod_{i=0}^{k-1} l_i \|x_0\| + \left(\sum_{i=0}^{m_k-m_{k-1}-2} s^i \right) \vartheta \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} s^{m_k-m_j-(k-j)} \prod_{i=j}^{k-1} l_i \left(\sum_{i=0}^{m_j-m_{j-1}-2} s^i \right) \vartheta, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \|x(m_k)\| &\leq s^{m_k-k} \prod_{i=0}^{k-1} l_i \|x_0\| + \left(\sum_{i=0}^{m_k-m_{k-1}-2} s^i \right) \vartheta \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} s^{m_k-m_j-(k-j)} \prod_{i=j}^{k-1} l_i \left(\sum_{i=0}^{m_j-m_{j-1}-2} s^i \right) \vartheta, \end{aligned} \quad (2.10)$$

Substitusi persamaan (2.10) ke persamaan (2.8) diperoleh pertidaksamaan sebagai berikut

$$\|x(m)\| \leq s^{m-m_k-1} l_k \|x(m_k)\| + \left(\sum_{i=0}^{m-m_k-2} s^i \right) \vartheta$$

$$\begin{aligned}
&\leq s^{m-m_k-1} l_k \left[s^{m_k-k} \prod_{i=0}^{k-1} l_i \|x_0\| + \left(\sum_{i=0}^{m_k-m_{k-1}-2} s^i \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{k-1} s^{m_k-m_j-(k-j)} \prod_{i=j}^{k-1} l_i \left(\sum_{i=0}^{m_j-m_{j-1}-2} s^i \right) \vartheta \right] \\
&\quad + \left(\sum_{i=0}^{m-m_k-2} s^i \right) \vartheta \\
\|x(m)\| &\leq s^{m-k-1} \prod_{i=0}^k l_i \|x_0\| + \left(\sum_{i=0}^{m-m_k-2} s^i \right) \vartheta \\
&\quad + s^{m-m_k-1} l_k \left(\sum_{i=0}^{m_k-m_{k-1}-2} s^i \right) \vartheta \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1} s^{m-m_j-(k-j)-1} \prod_{i=j}^k l_i \left(\sum_{i=0}^{m_j-m_{j-1}-2} s^i \right) \vartheta \\
&\leq s^{m-k-1} \prod_{i=0}^k l_i \|x_0\| + \left(\sum_{i=0}^{m-m_k-2} s^i \right) \vartheta \\
&\quad + \sum_{j=1}^k s^{m-m_j-(k-j)-1} \prod_{i=j}^k l_i \left(\sum_{i=0}^{m_j-m_{j-1}-2} s^i \right) \vartheta. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

(Terbukti) ■

Teorema 2.2 .

Misalkan Asumsi 1-3 terpenuhi, maka himpunan

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \frac{s^{T-1} - 1}{(1 - s^{T-1}l)(s - 1)} \vartheta \right\}$$

adalah *globally exponentially attracting set* dari sistem (2.2), dan sistem (2.2)

adalah *globally exponentially set-stable* dengan syarat memenuhi kriteria berikut:

- i. $s > 1$ dan $T = \sup_{k \in N} \{m_k - m_{k-1}\} < \infty$.
- ii. $s^{T-1}l < 1, l = \sup_{k \in N} \{l_k\}$.

Teorema 2.3.

Misalkan Asumsi 1-3 terpenuhi, maka himpunan

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \left(1 + \frac{l}{1 - s^{T-1}l} \right) \frac{1}{1 - s} \vartheta \right\}$$

adalah *globally exponentially attracting set* dari sistem (2.2), dan sistem (2.2)

adalah *globally exponentially set-stable* dengan syarat memenuhi kriteria berikut:

- i. $s < 1$ dan $T = \inf_{k \in N} \{m_k - m_{k-1}\} > 0$.
- ii. $s^{T-1}l < 1$.

Teorema 2.4.

Misalkan 1-3 terpenuhi, maka himpunan

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \frac{1}{1 - l} (T - 1) \vartheta \right\}$$

adalah *globally exponentially attracting set* dari sistem (2.2), dan sistem (2.2)

adalah *globally exponentially set-stable* dengan syarat memenuhi kriteria berikut:

- i. $s = 1$ dan $T = \sup_{k \in N} \{m_k - m_{k-1}\} < \infty$.
- ii. $l < 1$.

Bukti

Berdasarkan (2.7), dan $s = 1$ serta $l < 1$, dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{i=0}^{m-m_k-2} s^i \vartheta + \sum_{j=1}^k s^{m-m_j-(k-j)-1} \prod_{i=j}^k l_i \left(\sum_{i=0}^{m_j-m_{j-1}-2} s^i \right) \vartheta \\
&\leq (m-m_k-1)\vartheta + \sum_{j=1}^k \prod_{i=j}^k l_i (m_j-m_{j-1}-1)\vartheta \\
&\leq (T-1)\vartheta + \sum_{j=1}^k \prod_{i=j}^k l_i (T-1)\vartheta \\
&\leq \left(1 + \sum_{j=1}^k \prod_{i=j}^k l_i \right) (T-1)\vartheta,
\end{aligned}$$

karena $l = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{l_k\}$, sehingga

$$\prod_{i=j}^k l_i < \prod_{i=j}^k l,$$

akibatnya

$$\begin{aligned}
\gamma &\leq \left(1 + \sum_{j=1}^k \prod_{i=j}^k l \right) (T-1)\vartheta \\
&= \left(1 + \sum_{j=1}^k l^{k-j+1} \right) (T-1)\vartheta \\
&= \left(1 + \sum_{j=0}^{k-1} l^{j+1} \right) (T-1)\vartheta \\
&\leq \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} l^{j+1} \right) (T-1)\vartheta,
\end{aligned}$$

Berdasarkan Asumsi 2 dan Teorema 2.4, diketahui bahwa;

$0 < l < 1$, maka $l^{j+1} < 1$,

Andaikan diberikan $A = \sum_{j=0}^{\infty} l^{j+1} = l + l^2 + l^3 + \dots + 0$,

maka $\frac{A}{l} = 1 + l + l^2 + \dots + 0$,

diperoleh $\frac{A}{l} - A = 1$

$$A \left(\frac{1-l}{l} \right) = 1$$

$$A = \frac{l}{1-l},$$

sehingga

$$\begin{aligned} \gamma &\leq \left(1 + \frac{l}{1-l} \right) (T-1)\vartheta \\ \gamma &\leq \frac{1-l+l}{1-l} (T-1)\vartheta = \frac{1}{1-l} (T-1)\vartheta, \end{aligned} \quad (2.12)$$

Substitusi $s = 1$ dan persamaan (2.12) ke persamaan (2.6) dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \|x(m)\| &\leq s^{m-k-1} \prod_{i=0}^k l_i \|x_0\| + \gamma \\ &\leq \prod_{i=0}^k l \|x_0\| + \frac{1}{1-l} (T-1)\vartheta \\ &= l^k \|x_0\| + \frac{1}{1-l} (T-1)\vartheta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

(Terbukti) ■

Selanjutnya, pada kasus $\vartheta \equiv 0$, dapat dengan mudah ditunjukkan $x(m) = 0$ merupakan solusi (2.2) dari Asumsi 1 -3. Berikut, diberikan *attractivity* dari solusi nol dengan bukti yang similar dengan Teorema 2.2-2.4.

Akibat 2.1. Misalkan Asumsi 1 -3 dengan $\vartheta \equiv 0$ terpenuhi. Maka sistem (2.2) merupakan *globally exponentially stable* dengan syarat memenuhi kriteria berikut:

- i. $s > 1, T = \sup_{k \in N} \{m_k - m_{k-1}\} < \infty$ dan $s^{T-1}l < 1$.
- ii. $s < 1, T = \inf_{k \in N} \{m_k - m_{k-1}\} > 0$ dan $s^{T-1}l < 1$.
- iii. $s = 1$ dan $l > 1$.

Kriteria (i) – (iii) dari Akibat 2.1 dapat digabungkan, dan berikut hasil umum dengan Akibat 2.1.

Akibat 2.2 Misalkan Asumsi 1-3 dengan $\vartheta \equiv 0$ terpenuhi. Jika

- i. $0 < T = \inf_{k \in N} \{m_k - m_{k-1}\}$ dan
- ii. $T = \sup_{k \in N} \{m_k - m_{k-1}\} < \infty$ dan
- iii. $\max_{\alpha \in \{T, T\}} \{s^{\alpha-1}\}l < 1$.

maka sistem (2.2) *globally exponentially stable*.

Berdasarkan asumsi;

$\Phi_k(x) = \Phi(x)$ dan $m_k + 2 \leq m_{k+1} \leq m_k + 4$, Xu dan Teo (2016) membuat proposisi berikut:

Proposisi 2.1

Misalkan $\|x(m) + \Phi(x(m))\| \leq l \|x(m)\|$, dengan

$$0 < l < e, \quad \text{dan} \quad \|f(x(m))\| \leq s \|x(m)\|,$$

jika $\ln s + \frac{1}{3} \ln l < 0$, maka sistem (2.2) stabil asimtotik.

2.4. Simulasi Numerik untuk Pendesainan Pengendali Impulsif

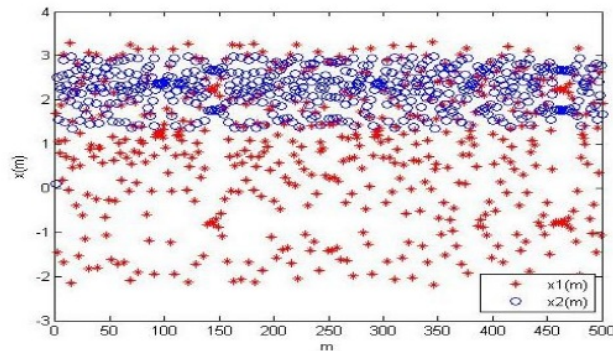
Pada subbagian ini diberikan simulasi numerik sebagai verifikasi dari metode yang telah dikemukakan. Dapat ditunjukkan keefektifan dari pengendali impulsif dalam menstabilkan sistem diskrit chaos. Dalam simulasi numerik digunakan software MATLAB R2008a. Perhatikan sistem diskrit sebagai berikut:

$$\begin{cases} x_1(m+1) = -1,5x_1(m) + 0,9x_2(m) + 1 \\ x_2(m+1) = 0,3x_1(m) + 2 \end{cases} \quad (2.14)$$

Dengan nilai awal $x(0) = (1,7, 0,1)^T$, hal ini bisa ditulis menjadi

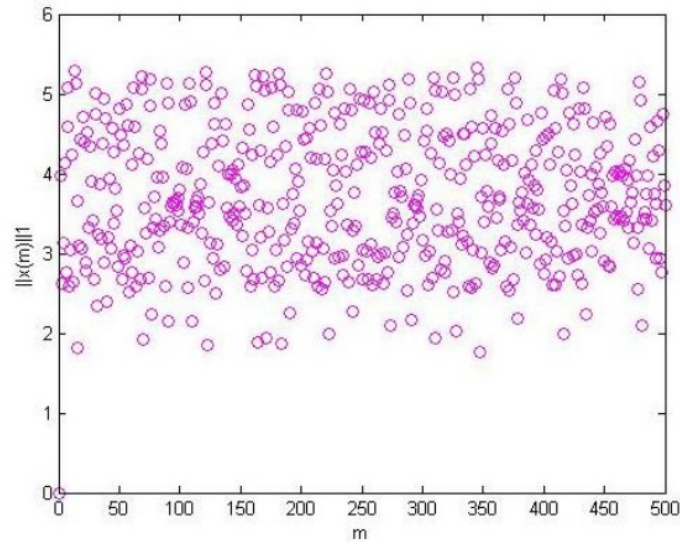
$$x(0) = \begin{cases} x_1(0) = 1,7 \\ x_2(0) = 0,1 \end{cases}$$

Sistem (2.14) ini belum tentu menunjukkan perilaku chaos, sehingga diperlukan pengecekan terlebih dahulu.



Gambar 2.1 Lintasan trayektori dari sistem (2.14) lup terbuka.

Gambar 2.1 tersebut diperoleh pada $x(m)$ saat nilai m adalah 1 sampai 500, dengan $x_1(m)$ berwarna merah dan $x_2(m)$ berwarna biru. Sedangkan hasil simulasi untuk $\|x(m)\|_1$ dapat dilihat pada Gambar 2.2, dengan nilai $m = 1$ sampai 500.



Gambar 2.2 Perilaku $\|x(m)\|_1$ dari sistem (2.14) lup terbuka.

56

Hasil simulasi yang terlihat pada Gambar 2.1 dan 2.2 menunjukkan bahwa sistem memiliki perilaku chaos. Maka untuk menstabilkan sistem diskrit chaos dibentuk pengendali impulsif linear sederhana $\{m_k, U(k, x)\}$ sebagai berikut.

Perhatikan

$$x(m+1) = f(x(m)), \quad m \in \widehat{\mathbb{Z}},$$

sehingga

$$f(x(m)) = \begin{cases} x_1(m+1) = -1,5x_1(m) + 0,9x_2(m) + 1 \\ x_2(m+1) = 0,3x_1(m) + 2 \end{cases}$$

karena

$\|f(x(m))\|_1 = \|x(m+1)\|_1$, dengan $\|x\|_1 = \sum_i^n |x_i|$, maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \|f(x(m))\|_1 &= \|x(m+1)\|_1 \\ &= |x_1(m+1) + x_2(m+1)| \\ &\leq |x_1(m+1)| + |x_2(m+1)| \\ &= |-1,5x_1(m) + 0,9x_2(m) + 1| + |0,3x_1(m) + 2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 1,5|x_1(m)| + 0,9|x_2(m)| + 1 + 0,3|x_1(m)| + 2 \\
&= 1,8|x_1(m)| + 0,9|x_2(m)| + 3 \\
&\leq 1,8|x_1(m) + x_2(m)| + 3 \\
&\leq 1,8\|x(m)\|_1 + 3,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

jadi, $\|f(x(m))\|_1 = \|x(m+1)\|_1 \leq 1,8\|x(m)\|_1 + 3$.

Ingat Asumsi 3.1, yaitu terdapat konstanta $s > 0$ dan $\vartheta \geq 0$ sehingga

$$\|f(x(m))\| \leq s\|x(m)\| + \vartheta, \quad \forall m \in \hat{\mathbb{Z}}, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

maka berdasarkan (2.15) dan Asumsi 1 dapat diperoleh $s = 1,8$ dan $\vartheta = 3$.

Kemudian, dengan $s = 1,8 > 1$, maka dapat dibentuk pengendali impulsif linear sederhana $\{m_k, U(k, x) = \Phi_k(x)\}$, dengan $m_k = 2k$ dan

$$U(k, x) = \Phi_k(x) = (e^{-1} - 1)x, \tag{2.16}$$

maka berdasarkan sistem (2.2)

$$\begin{aligned}
x(m+1) - x(m) &= \Phi_k(x(m)), \\
x(m+1) &= \Phi_k(x(m)) + x(m) \\
&= (e^{-1} - 1)x(m) + x(m) \\
&= e^{-1}x(m),
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh bentuk sistem (2.14) lup tertutup berdasarkan hukum pengendali impulsif sebagai berikut:

$$\begin{cases} x_1(m+1) = \begin{cases} -1,5x_1(m) + 0,9x_2(m) + 1 & , m \neq m_k, m \in \hat{\mathbb{Z}}, k \in N \\ e^{-1}(-1,5x_1(m) + 0,9x_2(m) + 1) & , m = m_k, k \in N \end{cases} \\ x_2(m+1) = \begin{cases} 0,3x_1(m) + 2 & , m \neq m_k, m \in \hat{\mathbb{Z}}, k \in N \\ e^{-1}(0,3x_1(m) + 2) & , m = m_k, k \in N \end{cases} \\ x(0) = (1,7, 0,1)^T \end{cases},$$

karena $m_k = 2k$ dan $s > 1$, maka $T = \sup_{k \in N} \{m_k - m_{k-1}\} < \infty$, yaitu $T = 2$.

Ingat kembali Asumsi 2 yaitu terdapat konstanta $l_k > 0$ sehingga

$$\|x(m) + \Phi_k(x(m))\| \leq l_k \|x(m)\|, \quad \forall k \in N, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

maka berdasarkan (2.16) dan Asumsi 2 dapat diperoleh $l_k > 0$ sebagai berikut;

$$\begin{aligned} \|x(m) + \Phi_k(x(m))\|_1 &= \|x(m) + (e^{-1} - 1)x(m)\|_1 \\ &\leq \|x(m)\|_1 + \|(e^{-1} - 1)x(m)\|_1 \\ &\leq \|x(m)\|_1 + \|e^{-1}x(m)\|_1 - \|x(m)\|_1 \\ \|x(m) + \Phi_k(x(m))\|_1 &\leq \|e^{-1}x(m)\|_1 \end{aligned}$$

Sehingga $l_k = l = e^{-1} > 0$.

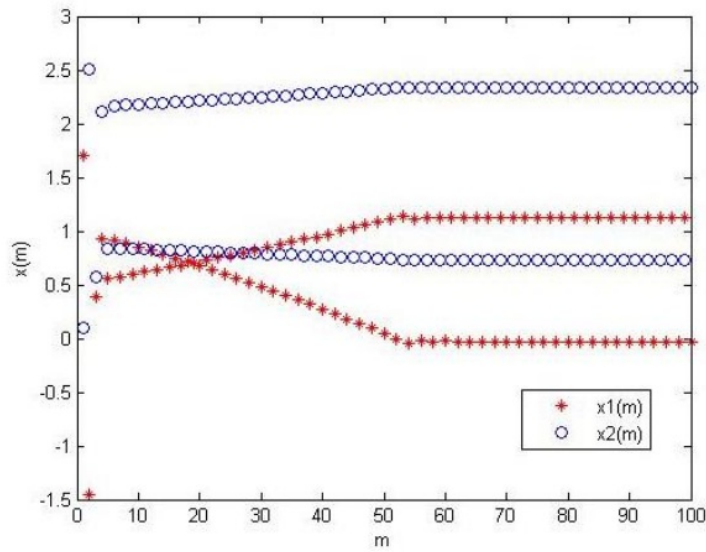
Telah diketahui bahwa $s = 1,8$, $\vartheta = 3$, $T = 2$ dan $l = e^{-1}$, maka

$$s^{T-1}l = 1,8e^{-1} = 0.6622 < 1,$$

dan kondisi tersebut mengindikasikan bahwa sistem (2.16) adalah *exponentially set-stable*, dan terdapat S, dengan

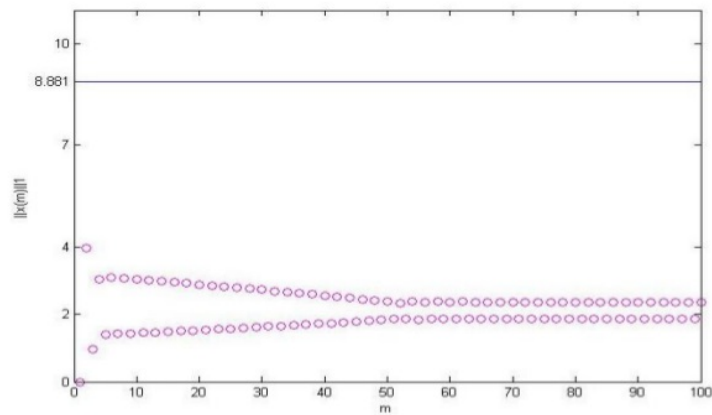
$$\begin{aligned} S &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \|x\|_1 \leq \frac{s^{T-1} - 1}{(1 - s^{T-1}l)(s - 1)} \vartheta \right. \right\} \\ S &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \|x\|_1 \leq \frac{(1,8 - 1)3}{(1 - 0.6622)(1,8 - 1)} = 8,8810 \right. \right\} \end{aligned}$$

adalah *globally exponentially attracting set*



Gambar. 2.3 Lintasan Trayektori dari sistem lup tertutup.

Gambar 2.3 memperlihatkan hasil pengendalian impulsif sistem (2.14), dengan iterasi dari 1 sampai 100.



Gambar. 2.4. Perilaku $\|x(m)\|_1$ dari sistem lup tertutup.

Hasil dari pengendalian impulsif pada sistem dengan iterasi sebanyak 1 sampai 500 disajikan pada Gambar 2.4. Dari hasil simulasi terlihat bahwa perilaku chaos pada sistem dapat distabilkan oleh hukum pengendali impulsif dan lintasan

trayektori dari sistem semua berada pada himpunan $S = \{x \in R^n \mid \|x\|_1 \leq 8,8810\}$. Hal ini memperlihatkan bahwa dengan pendisainan pengendali impulsif untuk sistem diskret chaos mampu menstabilkan sistem dan secara numerik sangat efektif.

BAB 3. MODEL KENDALI PREDIKTIF

Pada bagian ini diuraikan model kendali prediktif pelacak pada rantai pasokan, namun sebelumnya perhatikan terlebih dahulu, sistem kendali yang dideskripsikan dengan formulasi

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t))$$

dengan $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ sebagai vektor keadaan, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ vektor masukan, $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^d$ vektor gangguan, dan notasi $\mathbf{x}$ menyatakan perubahan keadaan terhadap waktu. $\mathbb{X}$ adalah himpunan keadaan yang *feasible*. Vektor masukan $\mathbf{u}(t)$ dibatasi oleh himpunan $\mathbb{U}$ dengan $\mathbb{U} = \{\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m | u_{min,i} \leq u_i \leq u_{max,i}, i = 1, 2, \dots, m\}$. Vektor gangguan dapat meliputi error pada sistem, tenaga luar yang tidak diketahui, atau bentuk ketidakpastian lainnya. Himpunan $\mathbb{X}$ dan $\mathbb{U}$ adalah himpunan kendala yang membatasi keadaan dan masukan.

Sistem di atas merupakan sistem nonlinier dengan waktu kontinu. Dengan mengubah sistem menjadi model diskrit, diperoleh sistem berikut:

$$\mathbf{x}(k+1) = f_d(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{d}(k))$$

dengan $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{d}(k) \in \mathbb{R}^d$. k digunakan untuk menotasikan periode saat ini dan $f_d(\cdot)$ digunakan untuk membedakan transisi keadaan diskrit dengan kontinu.

3.1. Persamaan Ruang Keadaan pada Rantai Pasokan

Persamaan ruang keadaan yang diberikan pada bagian ini merupakan sistem diskret linier yang dituliskan dalam bentuk.

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) + B_d\mathbf{d}, \quad (3.1)$$

dengan $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{X}$ sebagai vektor keadaan, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}$ vektor masukan, dan $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^d$ vektor gangguan. Matriks A adalah matriks yang berukuran $n \times n$, B matriks berukuran $m \times m$, dan B_d matriks yang berukuran $d \times d$. Diasumsikan bahwa sistem (A, B) terstabilkan.

Himpunan $\mathbb{X} = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n | x_{min,i} \leq x_i \leq x_{max,i}, i = 1, 2, \dots, n\}$ adalah himpunan keadaan yang dapat diterima (*feasible*). Vektor masukan $\mathbf{u}(t)$ dibatasi oleh himpunan $\mathbb{U} = \{\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m | u_{min,i} \leq u_i \leq u_{max,i}, i = 1, 2, \dots, m\}$. Gangguan $\mathbf{d}(t)$ diasumsikan terbatas pada $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^d$.

Persamaan ruang keadaan (3.1) disesuaikan berdasarkan proses yang terjadi pada setiap mata rantai untuk setiap periode waktu. Keadaan pada rantai pasokan, misalnya, dapat menyatakan banyaknya inventori yang disimpan di gudang produsen, dapat juga menyatakan banyaknya *backorder*. *Backorder* merupakan banyaknya pesanan yang belum dapat dipenuhi oleh pengecer karena kurangnya stok. Masukan model merupakan banyaknya produk yang harus dibuat oleh pabrik atau banyaknya produk yang harus dikirimkan ke konsumen. Sedangkan permintaan konsumen merupakan gangguan eksternal pada sistem ini.

Selanjutnya, sistem dikatakan setimbang apabila variabel keadaan tidak berubah terhadap waktu. Pada sistem dengan waktu diskrit, keadaan setimbang dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k) = 0, \text{ untuk suatu } k \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Sesuai rumusan ruang keadaan (3.1), persamaan di atas dapat ditulis lagi menjadi

$$(A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) + B_d\mathbf{d}) - \mathbf{x}(k) = 0, \quad (3.3)$$

atau

$$\mathbf{x}(k) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) + B_d\mathbf{d}. \quad (3.4)$$

Pada permasalahan sistem kendali, terdapat kemungkinan banyak nilai keadaan setimbang yang memenuhi persamaan (3.4). Oleh karena itu, perlu diformulasikan masalah keadaan setimbang yang dapat digunakan untuk mencari keadaan setimbang yang optimal. Formulasi ini digunakan untuk meminimalkan pengeluaran biaya ekonomik selama sistem bekerja.

Perhatikan fungsi $\ell_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ digunakan sebagai representasi perhitungan biaya operasi selama proses. Karena $\ell_E(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ merupakan refleksi dari proses ekonomik, kemudian fungsi ini dirujuk sebagai fungsi biaya ekonomik. Fungsi biaya ekonomik yang dirumuskan dapat berupa keuntungan langsung, laju produksi, atau selektivitas produk. Selanjutnya dapat diperoleh keadaan setimbang optimal ekonomik yang merupakan peminimum dari masalah optimasi

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \ell_E(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.5)$$

dengan kendala

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + B_d\mathbf{d},$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{X},$$

$$\mathbf{u} \in \mathbb{U}.$$

Dari permasalahan tersebut dapat ditentukan keadaan setimbang optimal yang ditulis dengan $(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s; \mathbf{d})$. Lebih lanjut, pada sistem rantai pasokan di mana diasumsikan model diskrit linier, fungsi tujuan dinyatakan sebagai

$$\ell_E(\mathbf{x}(j), \mathbf{u}(j)) = \mathbf{q}^T \mathbf{x}(j) + \mathbf{r}^T \mathbf{u}(j), \quad (3.6)$$

dengan $\mathbf{q}^T$ dan $\mathbf{r}^T$ sebagai vektor yang melambangkan efek keadaan dan masukan pada proses biaya ekonomik. Pada rantai pasokan, $\mathbf{q}^T$ dapat berupa *holding cost* inventori atau pinalti *backorder*. Sedangkan $\mathbf{r}^T$ dapat berupa biaya pemesanan atau biaya pengiriman.

Dengan demikian, masalah keadaan setimbang dapat ditulis sebagai

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \mathbf{q}' \mathbf{x}(j) + \mathbf{r}' \mathbf{u}(j) \quad (3.7)$$

dengan kendala

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_d \mathbf{d},$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{X}, \mathbf{u} \in \mathbb{U}.$$

3.2. Model Kendali Prediktif Pelacak pada Rantai Pasokan

Model kendali prediktif (*Model Predictive Control* (MPC)) merupakan teknik kendali berbasis optimasi. Tujuan utama dari kendali ini adalah mengarahkan sistem menuju keadaan setimbang optimal dan mempertahankan posisinya di keadaan tersebut. Sistem kendali prediktif pelacak biasa dirancang dengan fungsi tujuan kuadratik yang mewakili penyimpangan keadaan dan masukan dari nilai keadaan setimbang optimal ($\mathbf{z}_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$). Pada sistem rantai pasokan, sistem kendali prediktif pelacak menggunakan *stage cost* (fungsi biaya) diskret yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \ell_T(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k); \mathbf{z}_t) = \\ (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_t)^T Q (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_t) + (\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_t)^T R (\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

dengan Q matriks semidefinit positif Q dan R sebagai matriks pengendali yang mengarahkan keadaan dan masukan ke keadaan setimbang.

Apabila proses sistem diinginkan untuk berakhir pada suatu keadaan setimbang, dapat digunakan kendala akhir (*terminal constraint*) $\mathbf{x}(N) = \mathbf{x}_s$. Permasalahan sistem kendali prediktif pelacak dengan kendala akhir didefinisikan sebagai

$$\min_{\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1)} V_N(\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1); \mathbf{x}_0) \quad (3.9)$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(j+1) &= A\mathbf{x}(j) + B\mathbf{u}(j) + B_d \mathbf{d} \\ \mathbf{x}(j) &\in \mathbb{X} \\ \mathbf{u}(j) &\in \mathbb{U} \\ \mathbf{x}(N) &= \mathbf{x}_s \\ j &\in \{0, 1, \dots, N-1\}, \end{aligned}$$

dengan fungsi tujuan $V_N(\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1); \mathbf{x}_0)$ dinyatakan sebagai jumlah dari *stage cost*:

$$V_N(\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1); \mathbf{x}_0) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell_T(\mathbf{x}(j), \mathbf{u}(j); \mathbf{z}_t). \quad (3.10)$$

Pada rancangan kendali tersebut, selain untuk meminimalkan penyimpangan dari keadaan setimbang, sistem ini juga bertujuan untuk mencapai keadaan setimbang pada tahap akhir berlangsungnya sistem dengan adanya kendala akhir.

Dengan memperhatikan *stage cost* pada persamaan (3.8), fungsi tujuan sistem dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$V_N(\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1); \mathbf{x}_0) = \sum_{j=0}^{N-1} (\mathbf{x}(j) - \mathbf{x}_t)' Q (\mathbf{x}(j) - \mathbf{x}_t) + (\mathbf{u}(j) - \mathbf{u}_t)' R (\mathbf{u}(j) - \mathbf{u}_t). \quad (3.11)$$

3.3. Model Kendali Prediktif Ekonomik

Secara umum perbedaan antara sistem kendali prediktif ekonomik dan sistem kendali prediktif pelacak adalah terletak pada *stage cost*-nya. Perhatikan bahwa masalah kendali prediktif ekonomik dengan kendala akhir, diberikan dalam bentuk

$$\min_{\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1)} V_N(\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1); \mathbf{x}_0) \quad (3.12)$$

dengan kendala

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

$$\mathbf{x}(j+1) = A\mathbf{x}(j) + B\mathbf{u}(j) + B_d \mathbf{d},$$

$$\mathbf{x}(j) \in \mathbb{X},$$

$$\mathbf{u}(j) \in \mathbb{U},$$

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{x}_s,$$

$$j \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

dengan fungsi tujuan $V_N(\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1); \mathbf{x}_0)$ yang dinyatakan sebagai jumlah dari *stage cost* ekonomik (3.6):

$$V_N(\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(N-1); \mathbf{x}_0) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell_E(\mathbf{x}(j), \mathbf{u}(j)), \quad (3.13)$$

Persamaan (3.13) dapat dituliskan dalam bentuk

$$V_N(\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(N-1); \mathbf{x}_0) = \sum_{j=0}^{N-1} q' \mathbf{x}(j) + r' \mathbf{u}(j). \quad (3.14)$$

3.4. Kendali Prediktif Dua Tujuan

Pada bagian ini diberikan kendali prediktif dengan dua tujuan. Dalam rangka, menggabungkan fungsi tujuan dari dua model sistem yang berbeda digunakan metode *Adaptive Weighted Sum* (AWS). Dalam hal ini, fungsi-fungsi tujuan yang digabungkan adalah fungsi tujuan (3.6) dan (3.8). Bobot relatif $\omega \in [0,1]$ diperlukan untuk kepentingan fungsi tujuan ekonomik pada pengelola rantai pasokan. Semakin ω mendekati 1, pengendali mengutamakan optimalnya fungsi tujuan ekonomik dibandingkan dengan optimalnya fungsi tujuan pelacak. Sebaliknya apabila ω mendekati 0, maka pengendali mengutamakan optimalnya fungsi tujuan pelacak daripada fungsi tujuan ekonomik.

Formulasi *stage cost* dari sistem kendali prediktif dua tujuan dituliskan dalam bentuk di bawah ini

$$\ell(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\omega}{s_E} \ell_E(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{(1-\omega)}{s_T} \ell_T(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \mathbf{z}_t), \quad (3.15)$$

dengan $\mathbf{z}_t$ sebagai suatu keadaan setimbang dari sistem. Pada kasus inventori, $\mathbf{z}_t$ dapat berupa banyaknya persediaan aman(*safety stock*) yang ideal bagi pengelola sistem. Parameter s_E, s_T adalah parameter skala. Nilai keduanya diperoleh dengan menghitung selisih antara titik nadir dan titik utopia dari kedua fungsi yang digabungkan, yaitu

$$J^{Utopia} = J^U = (\ell_E(\mathbf{z}_E), \ell_T(\mathbf{z}_T; \mathbf{z}_t)), \quad (3.16)$$

$$J^{Nadir} = J^N = (\ell_E(\mathbf{z}_T), \ell_T(\mathbf{z}_E; \mathbf{z}_t)), \quad (3.17)$$

dengan

$$\mathbf{z}_T = (\mathbf{x}_T, \mathbf{u}_T) = \arg \min_{\mathbf{x}(j), \mathbf{u}(j)} \ell_T(\mathbf{x}(j), \mathbf{u}(j); \mathbf{z}_t), \quad (3.18)$$

$$\mathbf{z}_E = (\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) = \arg \min_{\mathbf{x}(j), \mathbf{u}(j)} \ell_E(\mathbf{x}(j), \mathbf{u}(j)). \quad (3.19)$$

Sehingga di peroleh

$$\begin{aligned} & (S_E, S_T) \\ &= J^N - J^U \\ &= (\ell_E(\mathbf{z}_T), \ell_T(\mathbf{z}_E; \mathbf{z}_t)) - (\ell_E(\mathbf{z}_E), \ell_T(\mathbf{z}_T; \mathbf{z}_t)). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Kemudian, masalah keadaan setimbang dapat ditulis dalam bentuk .

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \frac{\omega}{s_E} (q^T \mathbf{x} + r^T \mathbf{u}) \\ & + \frac{1-\omega}{s_T} \left((\mathbf{x} - \mathbf{x}_t)^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}_t) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_t)^T R (\mathbf{u} - \mathbf{u}_t) \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

dengan kendala

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + B_d \mathbf{d},$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{X},$$

$$\mathbf{u} \in \mathbb{U}.$$

Selanjutnya, dari masalah keadaan setimbang di atas, dapat diperoleh keadaan setimbang optimal yang dapat merepresentasikan kebijakan subjektif pengelola sistem. Sistem kendali prediktif dua tujuan (*bi-objective*) berikut

dirancang dengan kendala akhir untuk menjamin kestabilan sistem. Secara matematis, kendali dua tujuan berbasis optimasi ini dinyatakan sebagai.

$$\min_{\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1)} V_N(\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1); \mathbf{x}_0) \quad (3.22)$$

dengan kendala

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

$$\mathbf{x}(j+1) = A\mathbf{x}(j) + B\mathbf{u}(j) + B_d \mathbf{d},$$

$$\mathbf{x}(j) \in \mathbb{X},$$

$$\mathbf{u}(j) \in \mathbb{U},$$

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{x}_s,$$

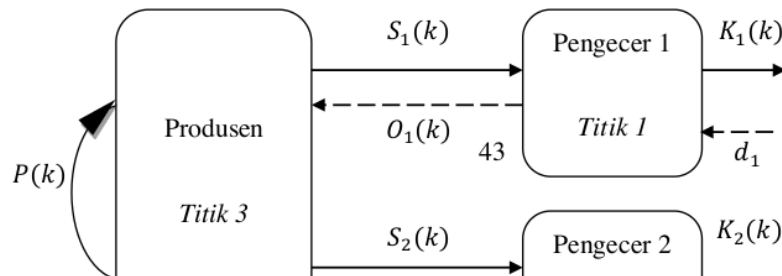
$$j \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

dengan fungsi tujuan $V_N(\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1); \mathbf{x}_0)$ didefinisikan sebagai jumlah dari *stage cost* gabungan:

$$V_N(\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(N-1); \mathbf{x}_0) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\omega}{s_E} \ell_E(\mathbf{x}(j), \mathbf{u}(j)) + \frac{(1-\omega)}{s_T} \ell_T(\mathbf{x}(j), \mathbf{u}(j); \mathbf{z}_t) \quad (3.23)$$

3.5. Simulasi Numerik Pendisaianan *Bi-objective* MPC

Pada bagian ini diberikan simulasi model untuk memaparkan kinerja kendali dua tujuan (*bi-objective*) pada sistem rantai pasokan. Gambar 3.1 menunjukkan sistem rantai pasokan tiga titik yang akan digunakan dalam simulasi numerik.





Pada simulasi numerik ini, diasumsikan bahwa tidak ada jeda waktu pada proses produksi maupun pengiriman. Pengecer n menanggapi permintaan produk d_n dengan mengirimkan K_n unit ke konsumen dan memesan O_n unit ke produsen. Keputusan ini ditentukan berdasarkan “keadaan” pengecer: banyaknya inventori pengecer, Iv_1 dan Iv_2 , dan banyaknya *backorder*, BO_1 dan BO_2 . Model dinamik keadaan pengecer adalah

$$Iv_1(k+1) = Iv_1(k) + S_1(k) - K_1(k) \quad (3.28)$$

$$BO_1(k+1) = BO_1(k) - K_1(k) + d_1 \quad (3.29)$$

$$Iv_2(k+1) = Iv_2(k) + S_2(k) - K_2(k) \quad (3.30)$$

$$BO_2(k+1) = BO_2(k) - K_2(k) + d_2 \quad (3.31)$$

dengan S_n sebagai pengiriman yang dilakukan oleh produsen ke pengecer n .

Sama seperti pengecer, produsen menanggapi pesanan pengecer, O_1 dan O_2 , dengan melakukan pengiriman S_1, S_2 dan produksi P . Model dinamik keadaan produsen dapat ditulis dalam bentuk

$$Iv_3(k+1) = Iv_3(k) + P(k) - S_1(k) - S_2(k) \quad (3.32)$$

$$BO_2(k+1) = BO_2(k) + O_1(k) + O_2(k) - S_1(k) - S_2(k) \quad (3.33)$$

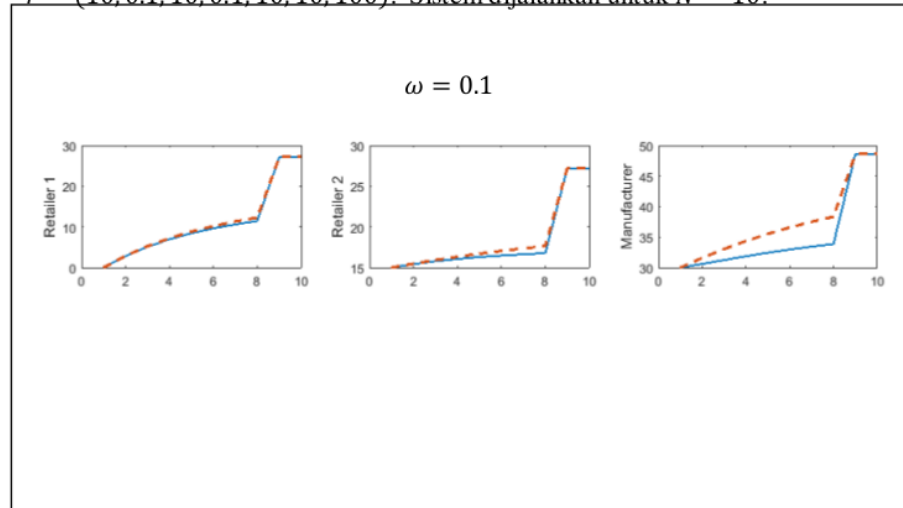
Kemudian, tulis variabel keadaan pada rantai pasokan sebagai $\mathbf{x} = [Iv_1 \text{ BO}_1 \text{ Iv}_2 \text{ BO}_2 \text{ Iv}_3 \text{ BO}_2]^T$ dan masukan sebagai $\mathbf{u} = [K_1 \text{ O}_1 \text{ K}_2 \text{ O}_2 \text{ S}_1 \text{ S}_2 \text{ P}]^T$, model ruang keadaan untuk rantai pasokan dengan tiga titik dapat dituliskan sebagai:

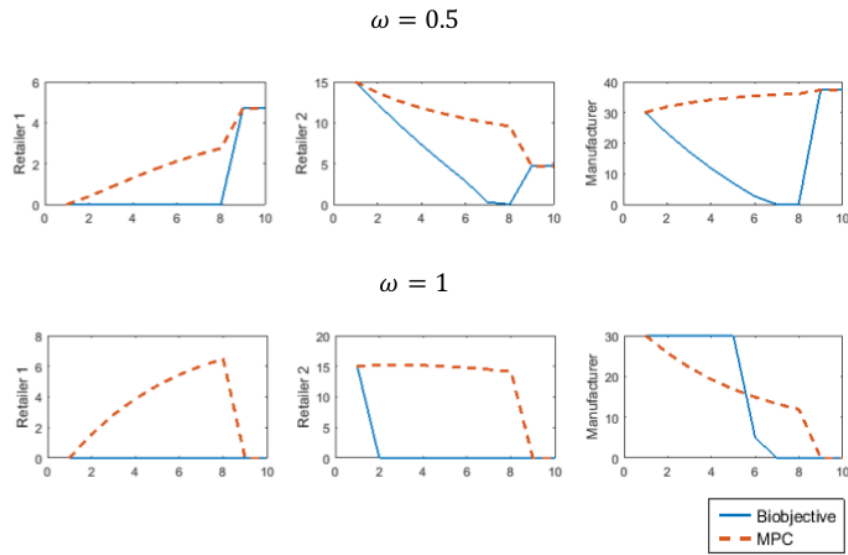
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{d}, \quad (3.34)$$

$$\text{dengan } \mathbf{A} = \mathbf{I}_6, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Pada simulasi numerik ini, $\mathbf{A} = \mathbf{I}_6$ adalah matriks identitas berukuran 6 x 6. Misalkan permintaan konsumen adalah $d_1 = 25$ dan $d_2 = 15$. Parameter yang digunakan adalah $\mathbf{x}_t = (30, 0, 30, 0, 50, 0)$, $\mathbf{u}_t = (25, 20, 15, 20, 25, 15, 40)$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(10, 10, 10, 10, 10, 10)$. Keadaan dan masukan sistem dibatasi pada $0 \leq x(k) \leq 100, 0 \leq u(k) \leq 100$. Biaya ekonomik yang dipakai adalah $\mathbf{q} = (20, 2, 20, 2, 10, 1)$ dan $\mathbf{r} = (10, 0.1, 10, 0.1, 10, 10, 100)$. Sistem dijalankan untuk $N = 10$.





Gambar 3.2. Perbandingan respon terhadap waktu dari kendali dua tujuan (bi-objektif) dan kendali prediktif(MPC) untuk nilai ω yang berbeda.

Pada Gambar 3.2, digambarkan respon lup-tertutup untuk tiga nilai ω . Kendali diperoleh dengan rumusan kendala akhir (3.22). Disamping itu, digambarkan pula respon untuk sistem kendali prediktif ke keadaan setimbang yang sama ($\ell_T(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \mathbf{z}_s)$).

Pada Tabel 3.1 terlihat bahwa perbandingan biaya ekonomik yang dihasilkan dari tiga sistem kendali, yaitu sistem kendali prediktif dengan dua tujuan (Bi-objective MPC), sistem kendali prediktif ekonomik(EMPC), dan sistem kendali prediktif (MPC).

Tabel 3.1 Perbandingan biaya ekonomik dari tiga kendali.

ω	Bi-objective MPC ($\times 10^4$)	MPC ($\times 10^4$)	EMPC ($\times 10^4$)
----------	---------------------------------------	--------------------------	---------------------------

0,1	6.3768	6.4077	Tidak fisibel
0.5	5.1459	5.4140	Tidak fisibel
1	4.6968	4.7928	4.6968

Diantara ketiga sistem kendali tersebut, mengindikasikan bahwa Bi-objective MPC paling ekonomis dibandingkan sistem kendali MPC dan EMPC.

BAB 4. MODEL DINAMIK HIBRID DAN KENDALINYA

Salah satu sistem dinamik hybrid untuk analisis dan/atau teknik desain kendali yang sedang berkembang adalah *Mixed and Logical Dynamical Systems* atau Sistem Dinamik Logika dan Campuran. Oleh karena itu pada bab ini terlebih dahulu dipaparkan sistem dinamik logika campuran. Selanjutnya diberikan kendali prediktif untuk MLD, model dinamik berbasis optimasi dan kendalinya serta simulasi model hibrid dan model dengan parameter random di industri manufaktur.

4.1 Sistem Dinamik Logika Campuran

Sistem dinamik logika campuran (*Mixed Logical Dynamical System*) merupakan salah satu cara untuk mendeskripsikan bagian penting dari sistem hibrid yang didefinisikan dengan persamaan dinamik linier dengan kendala pertidaksamaan linier bilangan bulat campuran (*Linear Mixed Integer Inequalities*), yang mana, pertidaksamaan tersebut terdiri dari variabel biner dan juga logika. Adapun bentuk umum model *Mixed Logical Dynamical* adalah

$$x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + B_2\delta(k) + B_3z(k), \quad (4.1a)$$

$$y(k) = Cx(k) + D_1u(k) + D_2\delta(k) + D_3z(k), \quad (4.1b)$$

$$E_2\delta(k) + E_3z(k) \leq E_1u(k) + E_4x(k) + E_5, \quad (4.1c)$$

dengan

x adalah variabel keadaan dan biner

$$x = \begin{bmatrix} x_c \\ x_l \end{bmatrix}, x_c \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_c}, x_l \in \{0,1\}^{n_l} \quad (4.2)$$

y adalah variabel keluaran dan biner

$$y = \begin{bmatrix} y_c \\ y_l \end{bmatrix}, y_c \in \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}^{p_c}, y_l \in \{0,1\}^{p_l} \quad (4.3)$$

u adalah variabel masukan dan biner

$$u = \begin{bmatrix} u_c \\ u_l \end{bmatrix}, u_c \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^{m_c}, u_l \in \{0,1\}^{m_l} \quad (4.4)$$

Variabel bantu biner : $\delta \in \{0,1\}^{r_l}$

Variabel bantu : $z \in \mathbb{R}^{r_c}$

Diperhatikan bahwa dengan mereduksi persamaan (4.1 c) dan dengan menentukan δ dan z menjadi nol, persamaan (4.1a) dan (4.1b) menyusut menjadi sistem persamaan keadaan linier diskrit tidak berkendala. Variabel δ dan z didapatkan dengan mendeskripsikan preposisi logika kedalam pertidaksamaan linier. Semua kendala dibentuk kedalam pertidaksamaan (4.1c).

Tabel 4.1 Tabel kebenaran

X_1	X_2	$X_1 \wedge X_2$	$X_1 \vee X_2$	$\sim X_1$	$X_1 \Rightarrow X_2$	$X_1 \Leftrightarrow X_2$	$X_1 \mathbf{xor} X_2$
T	T	T	T	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T	F

- 1) Preliminaries : pertama, akan dibutuhkan beberapa hal untuk melakukan transformasi pernyataan logika dalam variabel kontinu kedalam pertidaksamaan bilangan bulat campuran.

Diperhatikan bahwa pernyataan logika yang akan direpresentasikan menggunakan notasi X_i , seperti X_1 : " $x \leq 0$ ", atau X_2 : "*temperatur adalah dingin*". Maka X_i dinamakan literal, dan mempunyai nilai kebenaran antara T (benar) atau F (salah). Digunakan notasi yang menyertai koneksi boolean : $\wedge$ (dan), $\vee$ (atau), $\sim$ (negasi), $\Rightarrow$ (implikasi), $\Leftrightarrow$ (biimplikasi), $\mathbf{xor}$ (exclusive or). Koneksi tersebut didefinisikan dalam tabel kebenaran dalam Tabel 4.1, serta memberikan beberapa karakteristik seperti :

$$X_1 \Rightarrow X_2 \text{ adalah bernilai sama sebagai } \sim X_1 \vee X_2 \quad (4.5a)$$

$$X_1 \Rightarrow X_2 \text{ adalah bernilai sama sebagai } \sim X_2 \Rightarrow \sim X_1 \quad (4.5b)$$

$$X_1 \Leftrightarrow X_2 \text{ adalah bernilai sama sebagai } (X_1 \Rightarrow X_2) \wedge (X_2 \Rightarrow X_1) \quad (4.5c)$$

Persamaan (4.5) dapat diasosiasikan dengan literal X_i , sebuah variabel logika $\delta_i \in \{0,1\}$ yang mempunyai nilai 1 jika $X_i = T$, atau 0 jika $X_i = F$. Sebuah preposisi masalah logika, dengan pernyataan X harus dibuktikan menjadi benar diberikan dalam sebuah pernyataan himpunan (kompak) mengikuti literal $X_1, \dots, X_n$, dapat diselesaikan dengan makna dari program linier bilangan bulat, dengan mencocokkan

pernyataan kompak asli menjadi pertidaksamaan menyangkut variabel logika $\delta_1, \dots, \delta_n$. Sehingga, preposisi yang mengikuti dan kendala linier dapat dengan mudah dilihat sebagai ekuivalen.

$$X_1 \wedge X_2 \text{ ekuivalen dengan } \delta_1 = \delta_2 = 1 \quad (4.6a)$$

$$X_1 \vee X_2 \text{ ekuivalen dengan } \delta_1 + \delta_2 \geq 1 \quad (4.6b)$$

$$\sim X_1 \text{ ekuivalen dengan } \delta_1 = 0 \quad (4.6c)$$

$$X_1 \Rightarrow X_2 \text{ ekuivalen dengan } \delta_1 - \delta_2 \leq 0 \quad (4.6d)$$

$$X_1 \Leftrightarrow X_2 \text{ ekuivalen dengan } \delta_1 - \delta_2 = 0 \quad (4.6e)$$

$$X_1 \mathbf{xor} X_2 \text{ ekuivalen dengan } \delta_1 + \delta_2 = 1 \quad (4.6f)$$

Dapat digunakan kesimpulan perhitungan teknik untuk bagian model logika dari proses (saklar on/off, mekanika diskrit, kombinasi dan barisan jaringan), dan ilmu heuristik mengenai operasi industri sebagai pertidaksamaan bilangan bulat linier. Dalam hal ini, dapat dibentuk model dari sistem hybrid. Sedemikian sehingga dapat terlihat selanjutnya sebagai pertidaksamaan bilangan bulat campuran, yaitu pertidaksamaan linier yang melibatkan bersamaan variabel kontinu $x \in \mathbb{R}^n$ dan variabel logika $\delta \in \{0,1\}^{n_\delta}$.

Berdasarkan pernyataan $X \stackrel{\text{def}}{=} [f(x) \leq 0]$, dengan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Diasumsikan bahwa $x \in X$, dengan X adalah himpunan berhingga dan didefinisikan

$$M = \max_{x \in X} f(x), \quad m = \min_{x \in X} f(x) \quad (4.7)$$

Secara teori, dibawah estimasi dari M (m) untuk tujuan perhitungan. Walaupun demikian estimasi yang lebih realistik menghasilkan keuntungan perhitungan (Pudjiastuti, 2006). Sehingga dengan mudah didapatkan verifikasi dari

$$[f(x) \leq 0] \wedge [\delta = 1] \text{ bernilai benar jika hanya jika } f(x) - \delta \leq -1 + m(1 - \delta) \quad (4.8a)$$

$$[f(x) \leq 0] \vee [\delta = 1] \text{ bernilai benar jika hanya jika } f(x) \leq M\delta \quad (4.8b)$$

$$\sim [f(x) \leq 0] \text{ bernilai benar jika hanya jika } f(x) \geq \varepsilon_{tol} \quad (4.8c)$$

Dengan ε_{tol} adalah toleransi yang kecil (tipe presisi mesin), berdasarkan kendala yang didapatkan dari kerusakan. Dengan persamaan (4.5a) dan (4.5b), didapatkan juga

$$[f(x) \leq 0] \Rightarrow [\delta = 1] \text{ bernilai benar jika hanya jika } f(x) \geq \varepsilon + (m - \varepsilon)\delta \quad (4.9)$$

$$[f(x) \leq 0] \Leftrightarrow [\delta = 1] \text{ bernilai benar jika hanya jika } \begin{cases} f(x) \leq M(1 - \delta) \\ f(x) \geq \varepsilon + (m - \varepsilon)\delta \end{cases} \quad (4.10)$$

Sehingga didapatkan hasil prosedur untuk transformasi hasil dari variabel logika, dan dari variabel logika kontinu, dalam bentuk pertidaksamaan dengan menambahkan beberapa variabel bantu. Hasil dari bentuk $\delta_3 = \delta_1\delta_2$. Maka, $[\delta_3 = 1] \Leftrightarrow [\delta_1 = 1] \wedge [\delta_2 = 1]$, dan terdapat

$$\delta_3 = \delta_1\delta_2 \text{ ekuivalen dengan } \begin{cases} -\delta_1 + \delta_3 \leq 0 \\ -\delta_2 + \delta_3 \leq 0 \\ \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \leq 1 \end{cases}$$

Selanjutnya, bentuk $\delta f(x)$, dengan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dan $\delta \in \{0,1\}$, dapat diganti dengan variabel riil bantu $y = \delta f(x)$ yang menjelaskan

$$[\delta = 0] \Rightarrow [y = 0], \quad [\delta = 1] \Rightarrow [y = f(x)]$$

Sedemikian sehingga, dengan mendefinisikan M dan m dalam persamaan (4.7), $y = \delta f(x)$ ekuivalen dengan

$$y \leq M\delta \quad (4.11a)$$

$$y \geq m\delta \quad (4.11b)$$

$$y \leq f(x) - m(1 - \delta) \quad (4.11c)$$

$$y \geq f(x) - M(1 - \delta) \quad (4.11d)$$

2) Sistem MLD : hasil dari langkah sebelumnya akan dapat digunakan untuk deskripsi relasi untuk evolusi dari sistem dengan aturan fisik, aturan logika, dan operasi kendala yang interdependen. Berikut diberikan contoh sebelum diberikan definisi umum.

Contoh 4.1

Diberikan sistem dengan persamaan sebagai berikut.

$$x(k+1) = \begin{cases} 0.8x(k) + u(k) & \text{jika } x(k) \geq 0 \\ -0.8x(k) + u(k) & \text{jika } x(k) < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Diberikan $x(k) \in [-10,10]$, dan $u(k) \in [-1,1]$. Kondisi $x(k) \geq 0$ dapat diasosiasikan dengan variabel biner $\delta(k)$ sedemikian sehingga didapatkan

$$[\delta(k) = 1] \leq x(k) - m$$

Selanjutnya menggunakan transformasi dari persamaan (4.10), persamaan tersebut dapat diekspresikan kedalam pertidaksamaan

$$-m\delta(k) \leq x(k) - m$$

$$-(M + \varepsilon)\delta \leq -x - \varepsilon$$

dengan $M = -m = 10$, dan ε adalah bilangan skalar positif terkecil. Maka persamaan (4.12) dapat dituliskan kembali sebagai

$$x(k + 1) = 1.6 \delta(k)x(k) - 0.8x(k) + u(k)$$

Didefinisikan sebuah variabel baru $z(k) = \delta(k)x(k)$, dengan persamaan (4.11) dapat diekspresikan sebagai

$$z(k) \leq M(\delta) \quad (4.13a)$$

$$z(k) \geq m\delta(k) \quad (4.13b)$$

$$z(k) \leq x(k) - m(1 - \delta(k)) \quad (4.13c)$$

$$z(k) \geq x(k) - M(1 - \delta(k)) \quad (4.13d)$$

Perubahan dari sistem (4.12) diberikan dalam persamaan keadaan terbaru yaitu

$$x(k + 1) = 1.6z(k) - 0.8x(k) + u(k)$$

Kendala adalah persamaan (4.13) ■

Contoh 4.1 dapat secara umum dideskripsikan dengan relasi linier menjadi persamaan (4.1), sistem yang terbentuk dinamakan sistem *Mixed Logical Dynamical*.

Formalisasi *Mixed Logical Dynamical* memungkinkan spesifikasi perubahan dari variabel kontinu (berdasarkan persamaan linier dinamik), perubahan dari variabel diskrit (berdasarkan proposisi pernyataan logika dan automata), dan juga interaksi antara keduanya. Seperti dijelaskan sebelumnya ide dasar dari pendekatan terdiri dari perancangan bagian logika dalam persamaan keadaan dengan transformasi variabel boolean ke dalam bilangan bulat 0-1, dan dengan menjelaskan relasi sebagai pertidaksamaan bilangan bulat campuran. Sistem *Mixed Logical Dynamical* tersebut dapat dimodelkan dari kelas sistem, seperti sistem

Piecewise Affine, sistem hibrid linier, keadaan mesin berhingga, sistem bi-linier dengan masukan diskrit dan sebagainya.

4.2 Kendali Prediktif untuk MLD

Dalam teori kontrol, terdapat model matematika yang dikenal sebagai sistem dinamika hibrid dimana nilai variabel keadaan bergantung pada lokasi saat ini yaitu yang disebut sebagai model piecewise-affine (PWA). Model PWA dapat dikonversi ke dalam *mixed logical dynamical system* (MLD) dengan menuliskan model PWA dalam *hybrid systems description language* (HYSDEL) dan model yang ekuivalen dengan model MLD dapat dibangkitkan dengan and *mld* function pada *hybrid toolbox* untuk MATLAB. Untuk sistem persediaan dengan biaya penarikan secara parsial dimana biaya penahanan atau penyimpanan berbeda untuk beberapa interval tingkat saham, kemudian diformulasikan model matematika hibrid dengan model *piecewise-affine* (PWA) dan mengendalikan tingkat saham untuk melacak tingkat yang diinginkan dengan menggunakan model kontrol prediktif untuk sistem hibrida. Kontrol prediktif adalah metode kontrol optimal yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah pengendalian lintasan pelacakan. MPC dasar untuk sistem non hibrida dan MPC untuk sistem hibrida. Metode kontrol optimal ini memecahkan masalah yaitu menentukan input optimal dengan menentukan fungsi objektif dan mengoptimalkan biaya yang sesuai dengan menggunakan beberapa metode optimasi.

Perhatikan kembali model MLD dalam bentuk

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_2\delta(k) + \mathbf{B}_3z(k) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{D}_2\delta(k) + \mathbf{D}_3z(k) \quad (4.15)$$

$$\mathbf{E}_2\delta(k) + \mathbf{E}_3z(k) \leq \mathbf{E}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}_4\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_5 \quad (4.16)$$

di mana nilai-nilai untuk matriks $\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{C}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ dan $\mathbf{E}_5$ tersedia dalam Appendix 2. Misalkan H_p merupakan panjang prediksi horizon untuk merancang controller dengan menggunakan model predictive control untuk sistem hibrid, fungsi objektif untuk masalah kontrol optimal ini didefinisikan sebagai perolehan tingkat persediaan aktual dari tingkat stok yang diinginkan dengan matriks bobot $\mathbf{Q}_y$ dan biaya input dengan matriks bobot $\mathbf{Q}_u$ dan masalah kontrol optimal ini didefinisikan sebagai berikut

$$\min_{[\mathbf{u}, \delta, \mathbf{z}]_0^{H_p-1}} J([\mathbf{u}, \delta, \mathbf{z}]_0^{H_p-1}, \mathbf{x}_0) = \sum_{k=0}^{H_p-1} \left[\|\mathbf{y}(k) - \mathbf{y}_d\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \|\mathbf{u}(k)\|_{\mathbf{Q}_u}^2 \right] \quad (4.17)$$

terhadap :

$$\begin{aligned}
& \boxed{5} \\
& \begin{cases}
x(k+1) = Ax(k) + B_1 u(k) + B_2 \delta(k) + B_3 z(k) \\
y(k) = Cx(k) + D_1 u(k) + D_2 \delta(k) + D_3 z(k) \\
\boxed{12} \quad E_4 x(k) - E_1 u(k) + E_2 \delta(k) + E_3 z(k) \leq E_5 \\
u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max} \\
x_{\min} \leq x(k) \leq x_{\max} \\
y_{\min} \leq y(k) \leq y_{\max}
\end{cases}
\end{aligned}$$

dengan $k = 0, 1, \dots, H_p - 1$, selanjutnya simbol $v_{\min}$ dan $v_{\max}$ berarti batas atas dan batas bawah untuk v dan lambang $\|v\|_Q^2$ berarti $v^T Q v$.

4.3 Simulasi Model Hibrid di Industri Manufaktur

Model 1.

Model matematika hibrid dari suatu sistem persediaan dengan biaya penyimpanan yang kontinu sepotong-sepotong dibentuk oleh variabel keadaan. Model ini dipicu oleh perbedaan biaya penahanan untuk masing-masing dua atau lebih interval tingkat persediaan atau stok. Pertimbangkan sebuah sistem persediaan dimana dinamika tingkat stok bergantung pada pengiriman dan permintaan yang tiba. Misalkan k menunjukkan waktu peninjauan ulang waktu atau waktu pada sistem inventori ini, $y(k) \geq 0$ menunjukkan tingkat persediaan / persediaan pada periode waktu k dan $d(k)$ menunjukkan permintaan untuk periode waktu k . Dengan asumsi tingkat persediaan awalnya kosong, misal $k < 0$ untuk tingkat persediaan $y(k) = 0$. Misalkan $u(k)$ adalah jumlah pengiriman produk yang tiba yang sampai pada periode review k dan n_p penundaan waktu tunggu, maka dinamika y untuk sebarang $k \geq 0$, yaitu dinamika tingkat saham untuk beberapa interval tingkat saham dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
\boxed{23} \quad y(k) &= u(0) + u(1) + \dots + u(k - n_p - 1) \\
&\quad - d(0) - d(1) - \dots - d(k - 1) \\
&= \sum_{j=0}^{k-n_p-1} \boxed{70} u(j) - \sum_{j=0}^{k-1} d(j). \quad \boxed{82}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Misalkan $y(k) = x_1(k)$ dan $x_i(k) = q_j u(k - n_p + i)$ untuk $i = 2, 3, \dots, n_p + 1$ dimana $q_j, j = 1, 2, \dots, m$ melambangkan biaya penyimpanan untuk *stock level interval* $\hat{y}_0 = 0 \leq y(k) \leq \hat{y}_1$ dan $\hat{y}_{j-1} < y(k) \leq \hat{y}_j$ untuk $j = 2, 3, \dots, m$, maka dinamika (4.18) untuk *stock level interval* $\hat{y}_{j-1} < y(k) \leq \hat{y}_j$ dapat diekspresikan sebagai

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) - q_j d(k) \\
 x_2(k+1) &= x_3(k) \\
 x_3(k+1) &= x_4(k) \\
 &\vdots \\
 x_{(n-1)}(k+1) &= x_n(k) \\
 x_n(k+1) &= q_j u(k)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

dengan $n = n_p + 1$. Misalkan $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]'$ dan sistem (4.19) dapat diekspresikan sebagai invariant discrete time state space sebagai berikut

$$x(k+1) = Ax(k) + B_j u(k) + Dd(k) \quad (4.20)$$

$$\text{dengan } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, B_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q_j \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -q_j \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kemudian model matematis hibrid dari sistem persediaan ini dengan biaya penyimpanan sepotong-potong dapat ditulis sebagai model PWA berikut

$$x(k+1) = \begin{cases} Ax(k) + B_1 u(k) + Dd(k) & \text{if } 0 = \hat{y}_0 \leq y(k) \leq \hat{y}_1 \\ Ax(k) + B_2 u(k) + Dd(k) & \text{if } \hat{y}_1 < y(k) \leq \hat{y}_2 \\ \vdots & \\ Ax(k) + B_m u(k) + Dd(k) & \text{if } \hat{y}_{m-1} < y(k) \leq \hat{y}_m = \hat{y}_{\max} \end{cases} \quad (4.21)$$

$$y(k) = \begin{cases} \frac{1}{q_1} x(k), & \text{if } \hat{y}_0 < y(k) \leq \hat{y}_1 \\ \vdots & \\ \frac{1}{q_j} x(k), & \text{if } \hat{y}_{j-1} < y(k) \leq \hat{y}_j \\ \vdots & \\ \frac{1}{q_m} x(k), & \text{if } \hat{y}_{m-1} < y(k) \leq \hat{y}_m \end{cases} \quad (4.22)$$

Model matematika hibrid (4.21) - (4.22) akan dikontrol sedemikian rupa sehingga keadaan keluaran sistem ini berupa tingkat persediaan $y(k)$ mengikuti tingkat stok yang diinginkan y_d sedekat mungkin.

Simulasi untuk Model 1.

Misalkan kita memiliki sistem persediaan dengan biaya penarikan tunai di mana biaya penyimpanan per unit untuk 100 unit pertama adalah \$ 20 dan \$ 10 untuk 100 unit kedua. Misalkan lagi, waktu tunda $n_p = 2$ maka $n = 3$ dan dinamika vektor x adalah sebagai berikut

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) - q_j d(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = q_j u(k) \end{cases}$$

atau

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_j u(k) + Dd(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_j \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -q_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0]$.

Karena $q_1 = \$20$ untuk $0 = \hat{y}_0 \leq y(k) \leq \hat{y}_1 = 100$ dan $q_2 = \$10$ untuk $101 = \hat{y}_1 \leq y(k) \leq \hat{y}_2 = 200$, maka matriks B_j untuk (4.20) adalah

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 20 \end{bmatrix} \text{ and } B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Oleh karena itu, model matematis hibrida dari sistem persediaan ini dapat ditulis sebagai model PWA berikut

$$x(k+1) = \begin{cases} Ax(k) + B_1 u(k) + Dd(k) & \text{if } 0 \leq y(k) \leq 100 \\ Ax(k) + B_2 u(k) + Dd(k) & \text{if } 100 < y(k) \leq 200 \end{cases} \quad (4.23)$$

$$y(k) = \begin{cases} \frac{1}{20} x(k), & \text{if } 0 \leq y(k) \leq 100 \\ \frac{1}{10} x(k), & \text{if } 100 < y(k) \leq 200 \end{cases} \quad (4.24)$$

Matriks untuk MLD (4.14)-(4.16)

Matrks	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
Nilai	[0	1.0e+03 *	[0 0 0 0	[0 0 0 -	[1.0e+03 *
	0		0 0 0 0	1.0000	
	0	[-0.1000	-1 0 0 0	0 0 0	0.1000
	0	0.1000	1 0 0 0	-1.0000 -1.0000 0 0	0
	0	7.9500	-1 0 0 0	1.0000 1.0000 0 0	8.0500
	0	8.0500	1 0 0 0	-1.0000 -1.0000 0 0	7.9500
	0	-8.0500	0 -1 0 0	1.0000 1.0000 0 0	0.0500
	0	-7.9500	0 1 0 0	0 0 -1.0000 0	-0.0500
	0	4.0000	0 -1 0 0	0 0 1.0000 0	4.0000
	0	4.0000	0 1 0 0	0 0 -1.0000 0	4.0000
	-20	-4.0000	0 0 -1 0	0 0 1.0000	0
	20	-4.0000	0 0 1 0	0	0
	-10	2.0000	0 0 -1 0	0 0 0	2.0000
	10	1.0000	0 0 1 0	0	1.0000
	0	-1.0000	0 0 0 -1	0 0 0	0
	0	-2.0000	0 0 0 1	0 0 0	0
	0	0.2000	0 0 0 -1	0	0.2000
	0]	0.4000	0 0 0 1]	0 0 0	0.4000

		-0.4000		0		0
		-0.2000]		-0.0500	0	0]
				0		
				0.0500	0	0
				0		
				-0.1000	0	0
				0		
				0.1000	0	0
				0]		

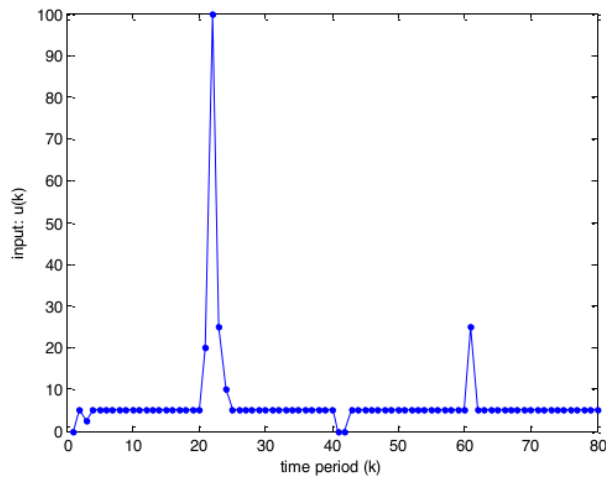
Model MLD ini akan dikontrol atau dikendalikan dengan menentukan input optimalnya sehingga output atau luaran dari sistem ini yaitu tingkat persediaan $y(k)$ mengikuti tingkat stok y_d yang diinginkan sedekat mungkin. Nilai tingkat stok yang diinginkan dapat ditemukan pada hasil simulasi. Permintaan simulasi ini diasumsikan konstan yaitu $d(k) = 5$ untuk semua $k > 0$. Nilai parameter untuk simulasi ini diberikan oleh Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Nilai Parameter

Parameter	Q_1, Q_2	H_p	$u_{\min}$	$u_{\max}$	$y_{\min}$	$y_{\max}$
Value	I^a	10	0	100	0	200

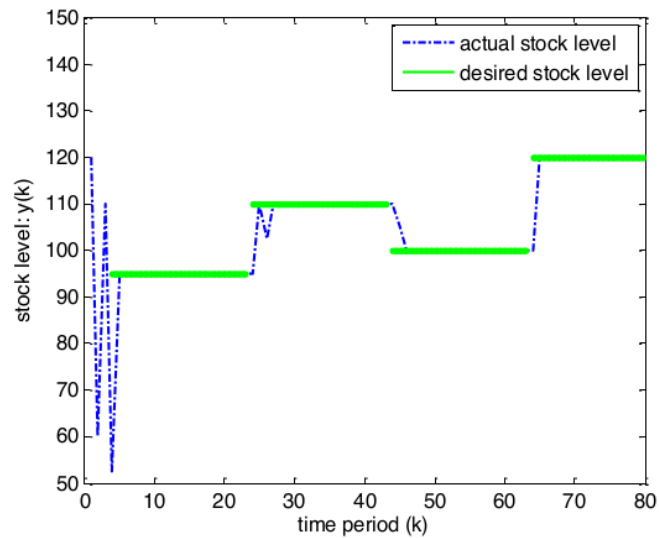
^a Identity matrix with appropriate dimension

Kami mensimulasikan sistem ini dengan 80 periode review. Hasil simulasi ditunjukkan oleh Gambar 4.1-4.3. Masukan optimal u^* ditunjukkan oleh Gambar 4.1. Tingkat stok aktual $y(k)$ dan tingkat stok yang diinginkan $y_d(k)$ ditunjukkan oleh Gambar 4.2. Nilai untuk variabel biner artifisial δ^* ditunjukkan oleh Gambar 4.3.



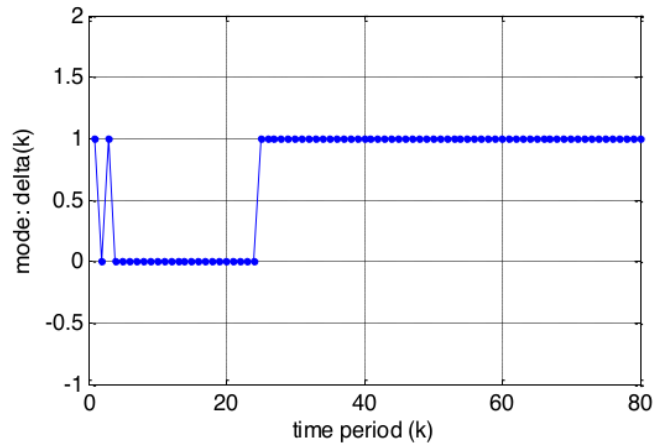
Gambar 4.1. Kontrol Optimal $u(k)$

Gambar 4.1 menunjukkan bahwa masukan optimal atau kontrol u yaitu jumlah pengiriman produk yang tiba untuk setiap periode waktu atau peninjauan k yang dihasilkan oleh pengoptimalan (4.17). Dari gambar ini, dapat dilihat bahwa dari periode waktu 0 sampai 20, kiriman cukup kecil yaitu sekitar 5 item, namun pada periode waktu 22 pengiriman produk adalah 100 item karena kenaikan tingkat persediaan yang diinginkan cukup besar, yaitu dari 95 item menjadi 110 item dan juga harus memenuhi permintaan pada periode saat ini. Setelah periode 25 dan seterusnya pengiriman produk relatif konstan karena permintaannya konstan. Masukan optimal yang ditunjukkan oleh Gambar 4.1 diterapkan pada sistem untuk menghasilkan output yaitu tingkat persediaan aktual $y(k)$ yang ditunjukkan oleh Gambar 4.2.



Gambar 4.2. Luaran *actual stock level* $y(k)$ dan *desired stock level* y_d

Gambar 4.2 menunjukkan output dari sistem persediaan ini yaitu tingkat persediaan (aktual) dan tingkat stok yang diinginkan yang diputuskan oleh pengambil keputusan. Dari angka ini, dapat dilihat pada periode waktu 0 sampai 5, tingkat persediaan berfluktuasi karena tingkat stok awal adalah 120 item, permintaan adalah 5 item dan tingkat persediaan yang diinginkan adalah 95 item, sehingga pengendali harus menghitung nilai input yaitu pengiriman produk untuk jangka waktu saat ini sehingga saham memenuhi permintaan dan mengikuti tingkat saham yang diinginkan bersamaan dengan biaya holding minimum. Hal ini juga dapat dilihat bahwa pada setiap periode waktu 5 sampai 80, tingkat persediaan cukup dekat dengan tingkat persediaan yang diinginkan.



Gambar 4.3. Dynamika mode

Gambar 4.3 menunjukkan informasi tambahan yaitu nilai mode untuk sistem persediaan ini. Mode 0 berarti tingkat persediaan y terletak pada interval dan mode 1 berarti tingkat persediaan y terletak pada interval. Nilai mode ini untuk setiap periode waktu mengikuti model PWA (4.24) di mana bagian pertama dari persamaan (4.24) berhubungan dengan mode-0 dan bagian kedua terkait dengan mode-1.

Model 2.

Misalkan $u_s(k)$ jumlah pengiriman barang tiba dari pemasok s yang tiba pada waktu / periode review k dan n_p lead time delay, maka dinamika tingkat stok produk untuk setiap dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 y(k) &= u_1(0) + u_2(0) + \dots + u_S(0) \\
 &+ u_1(1) + u_2(1) + \dots + u_S(1) \\
 &+ \dots + u_1(k - n_p - 1) + u_2(k - n_p - 1) \\
 &+ \dots + u_m(k - n_p - 1) - d(0) - d(1) - \dots - d(k-1) \\
 &= \sum_{j=0}^{k-n_p-1} \sum_{s=1}^S u_s(j) - \sum_{j=0}^{k-1} d(j).
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

dimana S menunjukkan jumlah pemasok dan $d(k)$ menunjukkan permintaan produk pada periode review k . Kami mengembangkan model untuk sistem persediaan dengan biaya penarikan piecewise (atau biaya

pemotongan dengan mempertimbangkan diskon). Misalkan $q_j, j=1,2,\dots,m$ menunjukkan *holding cost* dimana

$$\text{holding cost} = \begin{cases} q_1, & \text{if } \hat{y}_0 = 0 \leq y(k) \leq \hat{y}_1 \\ q_2, & \text{if } \hat{y}_1 < y(k) \leq \hat{y}_2 \\ \dots & \\ q_m, & \text{if } \hat{y}_{m-1} < y(k) \leq \hat{y}_m. \end{cases}$$

Misalkan $x_1(k) = y(k)$, $x_i(k) = q_j u(k - n_p + i)$ untuk $i = 2, 3, \dots, n_p + 1$

dan

$$\left. \begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) - q_j d(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ x_3(k+1) &= x_4(k) \\ &\vdots \\ x_{(n-1)}(k+1) &= x_n(k) \\ x_n(k+1) &= q_j u(k). \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

dimana $n = n_p + 1$, $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T$, maka *dynamic of stock level* dari suatu produk dapat disajikan sebagai model PWA sebagai berikut

$$x(k+1) = \begin{cases} Ax(k) + B_1 u(k) + D_1 d(k) & \text{if } \hat{y}_0 \leq y(k) \leq \hat{y}_1 \\ Ax(k) + B_2 u(k) + D_2 d(k) & \text{if } \hat{y}_1 < y(k) \leq \hat{y}_2 \\ \vdots & \\ Ax(k) + B_m u(k) + D_m d(k) & \text{if } \hat{y}_{m-1} < y(k) \leq \hat{y}_m \end{cases} \quad (4.27)$$

$$y(k) = \begin{cases} \frac{1}{q_1} x(k), & \text{if } \hat{y}_0 < y(k) \leq \hat{y}_1 \\ \vdots & \\ \frac{1}{q_j} x(k), & \text{if } \hat{y}_{j-1} < y(k) \leq \hat{y}_j \\ \vdots & \\ \frac{1}{q_m} x(k), & \text{if } \hat{y}_{m-1} < y(k) \leq \hat{y}_m \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\text{dengan } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, B_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q_j \end{bmatrix}, \text{ dan } D = \begin{bmatrix} -q_j \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Model PWA dapat dikendalikan dengan prediktif kontrol untuk sistem hibrid dengan menkonversikan ke dalam model MLD yang ekuivalen, selanjutnya penentuankontrol menggunakan *mixed-integer quadratic programmin* .

Simulasi untuk Model 2. Misalkan terdapat 4 suplier yaitu s_1, s_2, s_3 and s_4 untuk mensuplai suatu produk dengan *purchasing cost per unit for review period* 1, 2, 3, ..., 80 yang diberikan dalam Tabel 4.3 Kapasitas maksimum dari masing-masing suplier untuk mensuplai produk diberikan dalam Tabel 4.4.

Tabel 4.3 Biaya Pembelian Per Unit (\$)

periode waktu(k)	s_1	s_2	s_3	s_4
1, 2, ..., 20	9	9.5	10	10.5
21, 22, 23, ..., 40	11	9	8	8
41, 42, 43,, 60	10	11	12	8
61, 62, 63,, 80	9	12	11	10

Tabel 4.4 Kapasitas Pemasok (unit)

periode waktu (k)	kapasitas Pemasok			
	s_1	s_2	s_3	s_4
1, 2, 3, ..., 80	150	200	250	300

Misalkan biaya penyimpanan per unit adalah \$ 25 jika volume produk adalah 0 sampai 100 unit dan akan menjadi \$ 20 jika volume produk lebih dari 100 unit, di sini $q_1 = \$25$ dan $q_2 = \$20$ maka kapasitas penyimpanan maksimum adalah 300 unit dan delay lead time. . Kami memecahkan masalah ini di Windows 8 dengan prosesor AMD A6 2,7 GHz dan memori 4 GB dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB

R2013a dengan toolbox sistem hibrida. Dengan menulis model PWA (4.27)-(4.28) di HYSDEL dan menggunakan fungsi mld pada toolbox sistem hibrida, kami mengubah model PWA (4.27)-(4.28) menjadi model MLD setara dengan menambahkan variabel keadaan tambahan δ dan z .

Code in HYSDEL untuk model PWA (4.27)-(4.28)

```

SYSTEM pwa_hybrid_inventory {
48  INTERFACE { STATE { REAL x1 [0,4000];
      REAL x2 [0,4000]; REAL x3 [0,4000];
      REAL y1 [0,200]; }
      INPUT { REAL u1 [0,150]; REAL u2 [0,200];
      REAL u3 [0,250]; REAL u4 [0,300]; }
      OUTPUT { REAL y; }
      PARAMETER { REAL y_hat_1, d, q1, q2; }
      IMPLEMENTATION { AUX { REAL z1,z2,z3,z4; BOOL d1; }
        AD { d1 = y1 >= y_hat_1; }
        DA { z1 = {IF d1 THEN x1 + x2 - q2*d
          ELSE x1 + x2 - q1*d };
          z2 = {IF d1 THEN x3 ELSE x3 };
          z3 = {IF d1 THEN
61 q2*u1+q2*u2+q2*u3+q2*u4 ELSE q1*u1+q1*u2+q1*u3+q1*u4 };
          z4 = {IF d1 THEN x1/q2 ELSE
x1/q1 }; }
        CONTINUOUS { 60 x1 = z1; x2 = z2;
          x3 = z3; y1 = z4; }
        OUTPUT { y = y1; } } }

```

Note. Matriks untuk sistem (4.14)-(4.16)

$A = \text{zeros}(4,4)$, $B_1 = \text{zeros}(4,4)$, $B_2 = \text{zeros}(4,1)$, $B_3 = \text{eyes}(4,4)$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D_1 = \text{zeros}(1,4)$, $D_2 = 0$, $D_3 = \text{zeros}(1,4)$,

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & -20 & -20 & -20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 \\ -25 & -25 & -25 & -25 \\ 25 & 25 & 25 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} -100 \\ 100 \\ 8100 \\ 7900 \\ -7900 \\ -8100 \\ 4000 \\ 4000 \\ -4000 \\ -4000 \\ 18000 \\ 22500 \\ -22500 \\ -18000 \\ 200 \\ 160 \\ -160 \\ -200 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ -0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0.04 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 8500 \\ 7500 \\ 500 \\ -500 \\ 4000 \\ 4000 \\ 0 \\ 0 \\ 18000 \\ 22500 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \\ 160 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Permintaan simulasi ini diasumsikan konstan yaitu $d(k) = 20$ untuk semua $k > 0$. Asumsikan bahwa tingkat persediaan produk awal adalah 70 unit dan parameter lainnya diberikan oleh Tabel 4.5 dan Tabel 4.6.

Tabel 4.5 Nilai Parameter

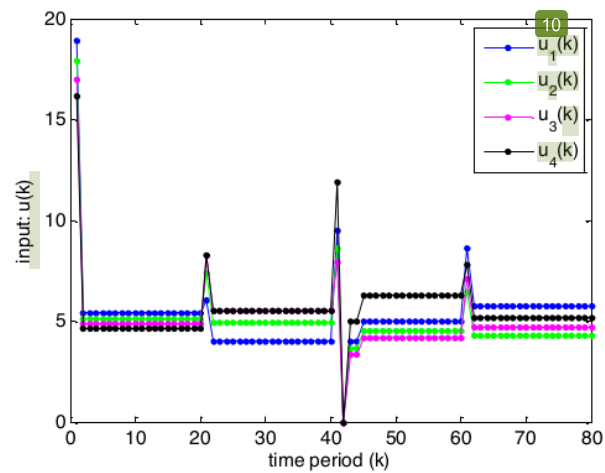
Parameter	k	Q_y	H_p	$u_{\min}$	$u_{\max}$	$y_{\min}$	$y_{\max}$
Value	any	1	10	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 250 \\ 300 \end{bmatrix}$	0	300

Tabel 4.6 Pembobotan Matriks Input

Time period (k)	Q_u
1,2,...,20	$diag(9,9.5,10,10.5)$
21,22,...,40	$diag(11,9,8,8)$
41,42,...,60	$diag(10,11,12,8)$
61,62,...,80	$diag(9,12,11,10)$

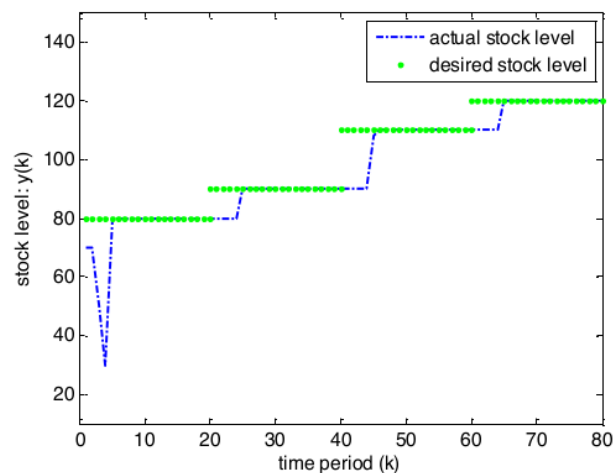
Dengan memecahkan (4.17) menggunakan pemrograman kuadrat-integer campuran (*mixed-integer quadratic programming*), kita memiliki hasil simulasi yang ditunjukkan oleh Gambar 4.4-4.6. Masukan atau

kontrol optimal ditunjukkan oleh Gambar 4.4. Tingkat stok aktual $y(k)$ dan tingkat stok yang diinginkan $y_d(k)$ ditunjukkan oleh Gambar 4.5.



Gambar 4.4. Input Optimal atau Kontrol Optimal $u(k)$

Gambar 4.4 menunjukkan masukan optimal u yaitu jumlah pengiriman produk yang tiba untuk setiap periode waktu peninjauan k . Dari gambar ini, dapat dilihat bahwa semua pemasok dipilih untuk memasok produk dengan volume yang berbeda. Masukan optimal yang ditunjukkan oleh Gambar 4.4 diterapkan pada sistem untuk menghasilkan output yaitu tingkat persediaan aktual $y(k)$ yang ditunjukkan oleh Gambar 4.5.



Gambar 4.5. Output: tingkat stok aktual $y(k)$ dan tingkat stok yang diinginkan y_d

Gambar 3.5 menunjukkan tingkat stok aktual dan tingkat stok yang diinginkan yang diputuskan oleh pengambil keputusan. Pada periode waktu 1 sampai 5, tingkat persediaan produk berfluktuasi karena penundaan waktu tunggu adalah 2 periode dan harus memenuhi permintaan pada periode 1 dan 2. Untuk periode waktu 5 sampai 80, tingkat persediaan produk mengikuti Tingkat yang diinginkan dengan baik meski setelah tingkat yang diinginkan berubah diperlukan 2 sampai 3 periode waktu untuk mengikuti tingkat yang diinginkan.

4.4. Model Dinamik Berbasis Optimasi dan Kendalinya

Sebelum dipaparkan model dengan piecewise objective, terlebih dahulu diberikan model dasar. Anggaplah bahwa peritel (atau produsen) memiliki rencana untuk membeli sejumlah produk dari pemasok S untuk beberapa periode masa depan yang dapat setiap hari, minggu, bulan, dll. Peritel harus memenuhi permintaannya terhadap produk untuk setiap waktu. periode dimana jumlah permintaan diketahui dengan pasti. Biarkan pada periode waktu t , pengecer memiliki I_t unit produk pada penyimpanan / inventarisnya, permintaan untuk jangka waktu t dapat dipenuhi oleh produk yang dibeli pada t atau sebelum t dan untuk memenuhi permintaan untuk periode berikutnya dapat dipenuhi oleh produk yang dibeli pada periode yang sama atau dapat dipenuhi oleh (jika mungkin) produk dalam persediaan dimana pengecer dikenai biaya penahanan. Peritel memutuskan untuk mengendalikan tingkat persediaan sehingga mendekati sedekat mungkin dengan tingkat referensi dengan biaya minimal. Misalkan

$X_{t,s}$: Jumlah produk yang dibeli dari pemasok pada periode waktu t ,

$U_{t,s}$: Biaya pembelian per unit produk dari pemasok pada periode waktu t ,

H_t : biaya penyimpanan per unit produk pada periode waktu t ,

M : Kapasitas maksimal penyimpanan

D_t : Satuan atau unitPermintaan produk.

Komponen biaya yang akan diminimalkan terdiri dari pembelian dan biaya penyimpanan. Karena biaya terminal untuk tujuan pengendalian referensi inventaris didefinisikan sebagai $(I_t - r_t)^2$ dengan r_t menunjukkan tingkat referensi pada periode waktu t . Kami merumuskan optimasi integer kuadrat berikut untuk memecahkan masalah

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S U_{t,s} X_{t,s} + \sum_{t=1}^T H_t I_t + \sum_{t=1}^T (I_t - r_t)^2 \quad (4.29)$$

Diterapkan pada:

$$I_{t-1} + \sum_{s=1}^S X_{t,s} - I_t \geq D_t, \forall t \in T; \quad (4.30)$$

$$X_{t,s} \leq C_s, \forall t \in T, \forall s \in S; \quad (4.31)$$

$$I_t \leq M, \forall t \in T; \quad (4.32)$$

$$X_{t,s}, I_t \in \{0, 1, 2, \dots\}, \forall t \in T, \forall s \in S. \quad (4.33)$$

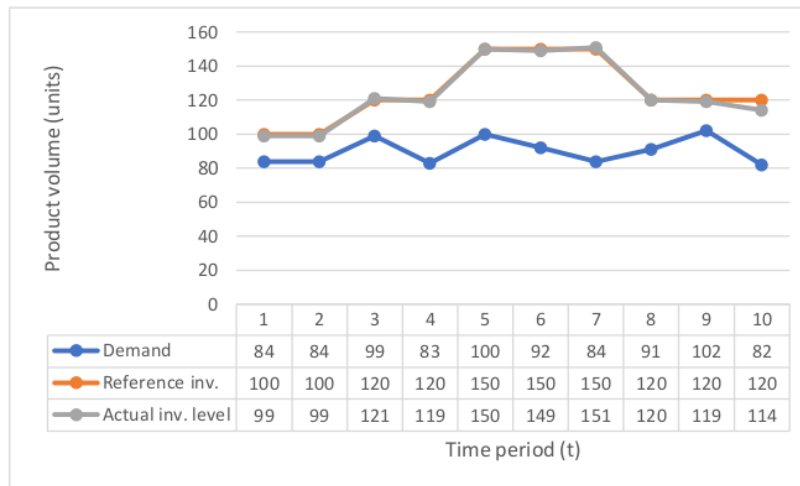
Fungsi tujuan (4.29) terdiri dari biaya pembelian semua produk untuk semua periode waktu, biaya penahanan untuk semua periode waktu dan biaya terminal untuk keperluan pengendalian referensi inventaris. Kendala (4.30) memastikan permintaan memuaskan produk untuk setiap periode waktu, (4.31) mendefinisikan jumlah produk yang dibeli dari pemasok tidak melebihi kapasitas pemasok, (4.32) memastikan tingkat persediaan tidak lebih dari kapasitas maksimum dari penyimpanan, dan akhirnya (4.33) mendefinisikan jumlah produk yang dibeli dan disimpan adalah bilangan bulat. Berikut diberikan simulasi model dasar.

Misalkan pembuat keputusan menginginkan agar tingkat persediaan / stok harus berada pada tingkat referensi sedekat mungkin dengan biaya minimal. Kami memecahkan masalah optimasi pada Windows 8 AMD A6 2.7GHz dan 2GB Memory dengan menggunakan software LINGO 15.0 dimana stochastic model class adalah multi stage stochastic dan kelas modelnya adalah MIQP (mixed integer quadratic programming). Program dinamis stokastik ini memiliki 36 skenario ⁷ seperti ditunjukkan oleh Tabel 4.7

Tabel 4.7 Skenario Program Dinamis Stokastik

Skenario	Periode waktu (<i>t</i>)	Biaya pembelian dari s_2 (\$)	Permintaan(unit)	$X_{t,s}$		Inventori (unit)	Peluang	Total biaya (\$)
				s_1	s_2			
1	1	12	100	0	199	99	0.0625	4270
	2	10	100	0	100	99		
	3	10	100	0	96	95		
2	1	12	100	0	199	99	0.0625	4490
	2	10	100	0	100	99		
	3	12	100	100	0	99		
3	1	12	100	0	199	99	0.0375	4470
	2	10	100	0	100	99		
	3	10	120	0	115	94		

4	1	12	100	0	199	99	0.0375	4700
	2	10	100	0	100	99		
	3	12	120	115	0	94		
⋮								
36	1	12	100	0	199	99	0.01	5862
	2	12	150	149	0	98		
	3	12	150	146	0	94		



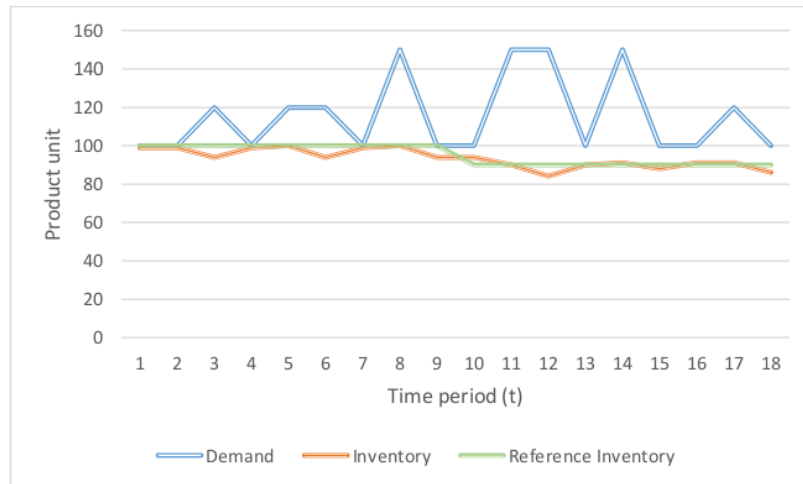
Gambar 4.6 Volume produk terhadap periode waktu

Tabel 4.8 Ilustrasi solusi

Periode waktu (t)	Biaya pembelian dari s_2 (\$)	Permintaan (unit)	$X_{t,s}$		Inventori	Inventori referensi
			s_1	s_2		
1	12	100	0	199	99	100
2	10	100	0	100	99	100
3	12	120	115	0	94	100

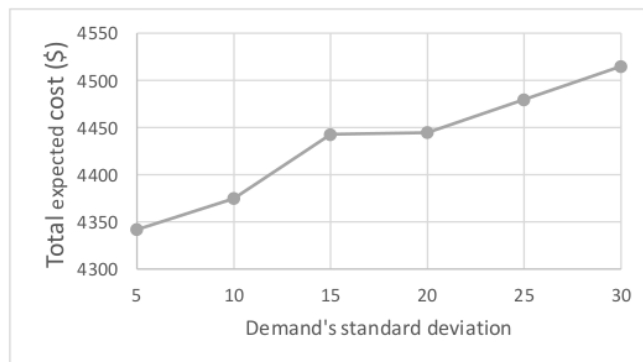
54

Dari Tabel 4.8, dapat dilihat bahwa pada setiap periode 1 dan 2, s_2 adalah pemasok optimal dan pada periode waktu 3, s_1 adalah pemasok yang optimal. Bisa juga dilihat bahwa tingkat persediaan tertutup terhadap rujukan.



Gambar 4.7a. Evolusi persediaan, persediaan dan inventori referensi

Untuk mengevaluasi dan mensimulasikan evolusi tingkat persediaan dengan beberapa titik acuan, kita mensimulasikan model untuk 18 periode waktu yang ditunjukkan oleh Gambar 4.7a. Dapat dilihat bahwa tingkat inventori / stok produk mengikuti titik acuan.



Gambar 4.7b. Pengaruh standar deviasi dari demand

Dari Gambar 4.7b, dapat dilihat bahwa jika deviasi standar permintaan meningkat maka total biaya yang diharapkan juga akan meningkat. Hal ini disebabkan oleh meningkatnya ketidakpastian permintaan atau nilai permintaan memiliki rentang yang luas. Jika deviasi standar permintaan lebih dari 30, kami memperkirakan bahwa total biaya yang diharapkan akan meningkat.

4.4.1. Model dengan *Piecewise Objectives*

Model 1. Misalkan produsen akan membeli produk dari pemasok S dengan biaya pembelian per unit yang

berbeda. Misalkan $X_{t,s}$ menunjukkan volume produk yang dibeli dari pemasok s pada periode waktu t dan $U_{t,s}$ menunjukkan biaya pembelian per unit dari pemasok $s \in S$ pada periode waktu $t \in T$ dimana S melambangkan himpunan pemasok dan T melambangkan himpunan periode waktu. Asumsikan bahwa ada diskon produk dari pemasok dengan skema sebagai berikut

$$U_{t,s} = \begin{cases} U_{t,s}^{(1)}, & \text{if } 0 = d_s^{(0)} < X_{t,s} \leq d_s^{(1)} \\ U_{t,s}^{(2)}, & \text{if } d_s^{(1)} < X_{t,s} \leq d_s^{(2)} \\ \vdots \\ U_{t,s}^{(J)}, & \text{if } d_s^{(J-1)} < X_{t,s} \leq d_s^{(J)} \end{cases}, \forall t \in T, \forall s \in S \quad (4.34)$$

atau

$$U_{t,s} = U_{t,s}^{(j)}, \text{ if } d_s^{(j-1)} < X_{t,s} \leq d_s^{(j)}, \forall t \in T, \forall s \in S \quad (4.35)$$

dimana $d_s^{(j)}, j=0,1,2,\dots,J$ suatu konstan yang harus diputuskan oleh supplier s .

Skema diskon produk ini juga bisa disebut tingkat harga. Misalkan H_t menunjukkan biaya penahanan per unit pada periode waktu t , simbol D_t menunjukkan permintaan produk pada periode waktu t dan I_t menunjukkan tingkat persediaan / stok produk pada periode waktu t . Pengambil keputusan memutuskan bahwa tingkat persediaan akan dikendalikan sehingga akan berada pada titik tertentu sedekat mungkin dengan titik acuan atau lintasan yang diberikan oleh pengambil keputusan. Misalkan r_t menunjukkan titik acuan pada periode waktu t , kita definisikan $(I_t - r_t)^2$ sebagai fungsi tujuan referensi lintasan. Asumsikan bahwa komponen biaya dalam masalah ini adalah biaya pembelian dan biaya penahanan, maka kami menentukan optimasi berikut yang meminimalkan total biaya

$$\min \begin{cases} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S U_{t,s}^{(1)} X_{t,s} + \sum_{t=1}^T H_t I_t + \sum_{t=1}^T (I_t - r_t)^2, & \text{if } 0 = d_s^{(0)} < X_{t,s} \leq d_s^{(1)} \\ \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S U_{t,s}^{(2)} X_{t,s} + \sum_{t=1}^T H_t I_t + \sum_{t=1}^T (I_t - r_t)^2, & \text{if } d_s^{(1)} < X_{t,s} \leq d_s^{(2)} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S U_{t,s}^{(J)} X_{t,s} + \sum_{t=1}^T H_t I_t + \sum_{t=1}^T (I_t - r_t)^2, & \text{if } d_s^{(J-1)} < X_{t,s} \leq d_s^{(J)} \end{cases} \quad (4.36)$$

atau

$$\min \left\{ \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S U_{t,s}^{(j)} X_{t,s} + \sum_{t=1}^T H_t I_t + \sum_{t=1}^T (I_t - r_t)^2, \text{ if } d_s^{(j-1)} < X_{t,s} \leq d_s^{(j)}, j=1,2,\dots,J. \right. \quad (4.37)$$

Selanjutnya kita merumuskan kendala untuk model optimasi ini. Untuk memastikan bahwa permintaan produk akan terpenuhi pada setiap periode waktu, kami memberikan batasan pertama sebagai berikut

$$I_{t-1} + \sum_{s=1}^S X_{t,s} - I_t \geq D_t, \forall t \in T. \quad (4.38)$$

Jika pemasok memiliki kapasitas maksimum C_s untuk memasok produk untuk jangka waktu tertentu t , maka kita memiliki kendala kedua sebagai berikut

$$X_{t,s} \leq C_s, \forall t \in T, \forall s \in S. \quad (4.39)$$

Untuk jangka waktu tertentu, jika persediaan memiliki kapasitas M maksimal, maka kita memiliki batasan ketiga sebagai berikut

$$I_t \leq M, \forall t \in T. \quad (4.40)$$

Kendala Integer untuk volume produk yang dibeli bisa dituliskan sebagai berikut

$$X_{t,s} \in \{0,1,2,\dots\}, \forall t \in T, \forall s \in S. \quad (4.41)$$

Model 2.

Masalah dengan nilai semua parameter diketahui dengan pasti lebih sederhana daripada masalah dengan parameter yang tidak pasti. Tapi faktanya, ada banyak parameter yang tidak pasti. Nilai permintaan dari pelanggan bisa dipastikan, tidak pasti atau keduanya. Pada bagian ini, penulis merumuskan model matematis untuk masing-masing lingkungan ini.

Dengan adanya masalah pemilihan pemasok multi-produk, multi-pemasok dan multi-periode. Selanjutnya simbol parameter dan variabel untuk masalah ini diberikan pada Tabel 4.9.

Table 4.9. Parameter and variabel masalah

Simbol	Deskripsi
p	Indeks produksi
s	Indeks pemasok
t	Indeks periode waktu
$X_{t,s,p}$	Jumlah produk yang dibeli dari pemasok p pada periode waktu t

	(unit)
$I_{t,p}$	Tingkat persediaan produk p pada periode waktu t (unit)
$U_{t,s,p}$	Biaya pembelian per unit produk p dari pemasok pada periode waktu t
$H_{t,p}$	Biaya penyimpanan per unit produk p pada periode waktu t
$D_{t,p}$	Permintaan produk p pada periode waktu t (unit)
$r_{t,p}$	Tingkat rujukan produk p pada periode waktu t untuk tujuan pengendalian stok
$C_{s,p}$	Kapasitas maksimal pemasok untuk memasok produk p (unit)
M_p	Kapasitas penyimpanan maksimum produk p per satuan periode waktu (unit)

Model matematika pertama diformulasikan untuk lingkungan deterministik. Kasus ini terjadi bila semua parameter diketahui dengan pasti. Misalkan jumlah pemasok adalah S dan jumlah periode waktu yang akan dipecahkan masalahnya T . Pengambil keputusan memutuskan bahwa tingkat persediaan akan dikendalikan sehingga akan berada pada titik tertentu sedekat mungkin dengan titik acuan yang diberikan oleh pengambil keputusan. Misalkan menunjukkan titik acuan pada periode waktu t dan $(I_t - r_t)^2$ menjadi tujuan pelacakan referensi. Penulis meminimalkan total biaya dan referensi tujuan pelacakan sebagai berikut

$$\min J \quad (4.42)$$

dengan syarat

$$J = \left\{ \begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^P U_{t,s,p}^{(1)} X_{t,s,p} + \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P H_{t,p} I_{t,p} \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P \left(I_{t,p} - r_{t,p} \right)^2, \text{ if } d_{t,s,p}^{(0)} \leq X_{t,s,p} \leq d_{t,s,p}^{(1)}, \\ & \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^P U_{t,s,p}^{(2)} X_{t,s,p} + \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P H_{t,p} I_{t,p} \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P \left(I_{t,p} - r_{t,p} \right)^2, \text{ if } d_{t,s,p}^{(1)} < X_{t,s,p} \leq d_{t,s,p}^{(2)}, \\ & \vdots \\ & \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^P U_{t,s,p}^{(J)} X_{t,s,p} + \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P H_{t,p} I_{t,p} \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P \left(I_{t,p} - r_{t,p} \right)^2, \text{ if } d_{t,s,p}^{(J-1)} < X_{t,s,p} \leq d_{t,s,p}^{(J)}, \end{aligned} \right.$$

atau ini dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut.

$$J = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^P U_{t,s,p}^{(j)} X_{t,s,p} + \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P H_{t,p} I_{t,p} \\ + \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P \left(I_{t,p} - r_{t,p} \right)^2, \text{ if } d_{s,p}^{(j-1)} < X_{t,s,p} \leq d_{s,p}^{(j)},$$

dimana diskon untuk biaya pembelian menggunakan skema berikut

$$U_{t,s,p} = \begin{cases} U_{t,s,p}^{(1)}, & \text{if } d_{s,p}^{(0)} < X_{t,s,p} \leq d_{s,p}^{(1)} \\ U_{t,s,p}^{(2)}, & \text{if } d_{s,p}^{(1)} < X_{t,s,p} \leq d_{s,p}^{(1)} \\ \vdots \\ U_{t,s,p}^{(J)}, & \text{if } d_{s,p}^{(J-1)} < X_{t,s,p} \leq d_{s,p}^{(J)} \end{cases} \quad (4.43)$$

untuk $\forall t \in T, \forall s \in S$, atau dapat disajikan sebagai berikut

$$U_{t,s,p} = U_{t,s,p}^{(j)}, \text{ if } d_{s,p}^{(j-1)} < X_{t,s,p} \leq d_{s,p}^{(j)}, \quad (4.44)$$

untuk $\forall t \in T, \forall s \in S$ dengan $d_{s,p}^{(j)}, j = 0, 1, 2, \dots, J$ adalah tingkat harga untuk skema diskon ini.

Kendala model dapat dijelaskan sebagai berikut. Kendala

$$I_{t-1,p} + \sum_{s=1}^S X_{t,s,p} - I_{t,p} \geq D_{t,p}, \forall t \in T, \forall p \in P \quad (4.45)$$

digunakan untuk memastikan bahwa produk dalam penyimpanan dan produk yang dibeli akan memenuhi permintaan.

Kendala

$$X_{t,s,p} \leq C_{s,p}, \forall t \in T, \forall s \in S, \forall p \in P \quad (4.46)$$

digunakan untuk memastikan bahwa pemasok bentuk produk yang dibeli tidak lebih dari kapasitas pemasok C_s . Misalkan kapasitas maksimal dari penyimpanan tersebut M , maka kendala

$$I_{t,p} \leq M_p, \forall t \in T, \forall p \in P \quad (4.47)$$

digunakan untuk memastikan bahwa tingkat persediaan tidak melebihi kapasitas penyimpanan. Akhirnya, kendala terakhir yaitu kendala integer untuk volume produk yang dibeli dirumuskan sebagai berikut

$$X_{t,s,p} \in \{0, 1, 2, \dots\}, \forall t \in T, \forall s \in S, \forall p \in P. \quad (4.48)$$

4.4.2. Kendali Optimal untuk Model dengan *Piecewise Objectives*

Pendekatan via *Dynamic Programming*

Pemrograman dinamis atau pemrograman multi-tahap ⁶⁷ adalah teknik yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah optimasi dengan menggunakan iterasi ke belakang (atau forward) dari akhir masalah ke awal masalah [11]. Pemrograman dinamis membagi masalahnya menjadi tahap dimana setiap tahap memiliki beberapa negara asosiasi dan menggunakan fungsi rekursi untuk melakukan iterasi ke belakang atau ke depan. Ada dua jenis pemrograman dinamis yang deterministik bila semua parameter diketahui dengan pasti atau stochastic dimana setidaknya salah satu parameternya tidak pasti atau acak. Pemrograman dinamis dapat digunakan untuk memecahkan banyak kelas masalah pengoptimalan seperti pemrograman linier dinamis, pemrograman kuadrat dinamis, pemrograman nonlinier dinamis, pemrograman bilangan bulat dinamis dan pemrograman integer campuran.

Beberapa alat pengoptimalan dikembangkan yang bisa digunakan untuk melakukan pemrograman dinamis. Dalam makalah ini, kami menggunakan LINGO 15.0 yang diberikan untuk memperbaiki masalah optimasi (4.36) dimana kelas model adalah program kuadrat kuadrat murni (PIQP).

4.4.3. Simulasi Model dengan *Piecewise Objectives* di Industri Manufaktur

Simulasi model 1. Misalkan sebuah manufaktur memiliki empat pemasok yaitu s_1 , s_2 , s_3 dan s_4 . Untuk jangka waktu tertentu, biaya pembelian dari s_1 adalah \$ 12 / unit jika pabrikan membeli kurang atau sama dengan 100 unit dan akan menjadi \$ 9 / unit jika produsen membeli produk tersebut lebih dari 100 unit namun tidak lebih dari 120 unit sejak kapasitas maksimum pemasok s_1 adalah 120 unit. Biaya pembelian dari pemasok s_2 adalah \$ 13 / unit jika pabrikan membeli kurang atau sama dengan 150 unit dan akan menjadi \$ 9 / unit jika pabrikan membeli lebih dari 150 unit tapi tidak lebih dari 200 unit karena kapasitas maksimum pemasok s_2 adalah 200 unit. Biaya pembelian dari supplier s_3 adalah \$ 13 / unit jika pabrikan membeli kurang atau sama dengan 100 unit dan akan menjadi \$ 9 / unit jika pabrikan membeli lebih dari 100 unit tapi tidak lebih dari 200 unit karena kapasitas maksimum supplier s_3 adalah 200 unit. Akhirnya, biaya pembelian dari pemasok s_4 adalah \$ 14 / unit jika produsen membeli kurang atau sama dengan 120 unit dan akan menjadi \$ 8 / unit jika pabrikan membeli lebih dari 120 unit tapi tidak lebih dari 150 unit karena kapasitas maksimum pemasok s_4 adalah 150 unit. Biaya pembelian per unit produk dari semua pemasok dirangkum oleh Tabel 4.10 dan permintaan produk untuk periode waktu 1 sampai 12 diberikan oleh Tabel 4.11.

Misalkan tingkat persediaan awal adalah 0 item dan biaya holding adalah \$ 1 / unit / periode. Akhirnya kapasitas gudang maksimal 200 unit / periode. Pembuat keputusan menginginkan agar tingkat persediaan / stok harus berada pada titik tertentu sedekat mungkin dengan tingkat referensi 100 unit dengan biaya minimal.

Tabel 4.10. Biaya pembelian dan kapasitas pemasok

Pemasok	Biaya pembelian	Kapasitas pemasok (unit/periode)
s_1	$\begin{cases} \$12 & \text{if } X_{t,1} \leq 100 \\ \$9 & \text{if } X_{t,1} > 100 \end{cases}$	120
s_2	$\begin{cases} \$13 & \text{if } X_{t,2} \leq 150 \\ \$10 & \text{if } X_{t,2} > 150 \end{cases}$	200
s_3	$\begin{cases} \$13 & \text{if } X_{t,2} \leq 100 \\ \$9 & \text{if } X_{t,2} > 100 \end{cases}$	200
s_4	$\begin{cases} \$14 & \text{if } X_{t,2} \leq 120 \\ \$8 & \text{if } X_{t,2} > 120 \end{cases}$	150

Tabel 4.11. Permintaan produk

Periode waktu (t)	Permintaan (unit)
1	150
2	70
3	80
4	120
5	140
6	100
7	320
8	250
9	270
10	180
11	310
12	270

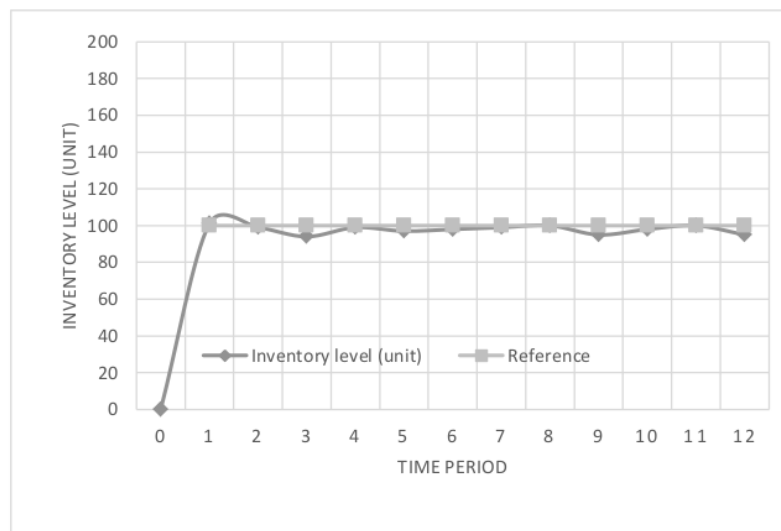
Kami menyelesaikan masalah optimasi (4.37) untuk 12 periode waktu dengan 3-kali-3 periode waktu dengan menggunakan LINGO 15.0 pada prosesor Windows 8 AMD A6 2.7 GHz dan Memori 4 GB. Strategi optimal untuk masalah ini dirangkum dalam Tabel 3.

Tabel 4.12. Solusi masalah

Periode waktu (t)	$X_{t,s}$				Permintaan (unit)	<i>Inventory</i> (unit)
	s_1	s_2	s_3	s_4		
1	101	0	0	150	150	101
2	68	0	0	0	70	99
3	75	0	0	0	80	94
4	0	0	0	125	120	99
5	0	0	0	138	140	97
6	0	0	101	0	100	98
7	0	0	171	150	320	99

8	0	0	101	150	250	100
9	115	0	0	150	270	95
10	33	0	0	150	180	98
11	0	0	162	150	310	100
12	115	0	0	150	270	95

Tabel 4.12 menunjukkan strategi optimal untuk periode 1 sampai 12. Dapat dilihat bahwa pada periode 1, pabrikan harus membeli 101 unit dari pemasok dan 150 unit dari pemasok s4 sedangkan s2 dan s3 tidak dipilih untuk memasok produk. Pada periode 2, pabrikan harus hanya membeli 68 unit dari pemasok s1. Evolusi tingkat persediaan produk dan titik rujukannya dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 4.8. Evolusi tingkat persediaan produk dan lintasan rujukannya

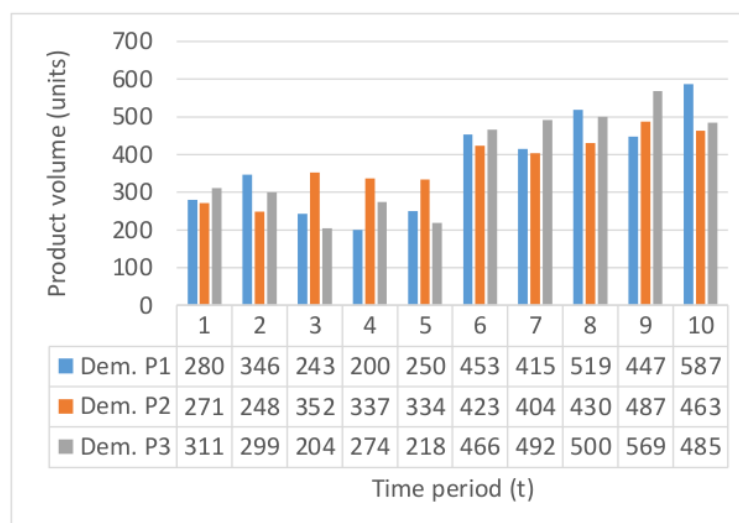
24

Dari Gambar 4.8, dapat dilihat bahwa tingkat persediaan awal adalah 0 unit dan persediaan referensi adalah 100 unit untuk semua periode waktu. Pada periode 1 sampai 12, tingkat persediaan cukup dekat dengan titik referensi. Penyimpangan terbesar antara tingkat persediaan aktual dan persediaan referensi adalah 6 unit pada periode waktu 3 dan deviasi terkecil adalah 0 unit pada periode waktu 8 dan 11. Dapat disimpulkan bahwa tingkat persediaan mengikuti titik referensi dengan baik.

Simulasi Model 2. Pada bagian ini, penulis memberikan tiga percobaan numerik yang merupakan eksperimen numerik dalam lingkungan deterministik dimana semua parameter diketahui dengan pasti,

eksperimen numerik di lingkungan probabilistik dimana parameter permintaan bersifat acak dan eksperimen numerik untuk tujuan analisis sensitivitas. Masalahnya adalah sebagai berikut. Misalkan produsen memiliki tiga pemasok yaitu s1, s2 dan s3 untuk memasok products p1, p2 dan p3. Biaya pembelian untuk setiap produk dari masing-masing pemasok mempertimbangkan diskon seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.9. Misalkan tingkat persediaan awal untuk setiap produk adalah 0 item dan biaya penahanan adalah \$ 1 / unit / periode untuk p1, \$ 2 / unit / periode untuk p2 dan \$ 4 / unit / periode untuk p3. Akhirnya, kapasitas gudang maksimal 300 unit / periode untuk p1, 250 unit / periode untuk p2 dan 250 unit / periode untuk p3. Pembuat keputusan menginginkan agar tingkat persediaan / stok harus berada pada titik tertentu sedekat mungkin dengan tingkat referensi yang diberikan dalam hasil simulasi masing-masing. Penulis menyelesaikan semua eksperimen numerik di LINGO® 16.0 dengan OS Windows 8, prosesor AMD A6 2.7GHz dan Memori 4 GB.

Untuk simulasi pertama, biarlah nilai permintaan semua produk diketahui dengan pasti. Biarkan nilai permintaan setiap produk diberikan pada Gambar 4.9.



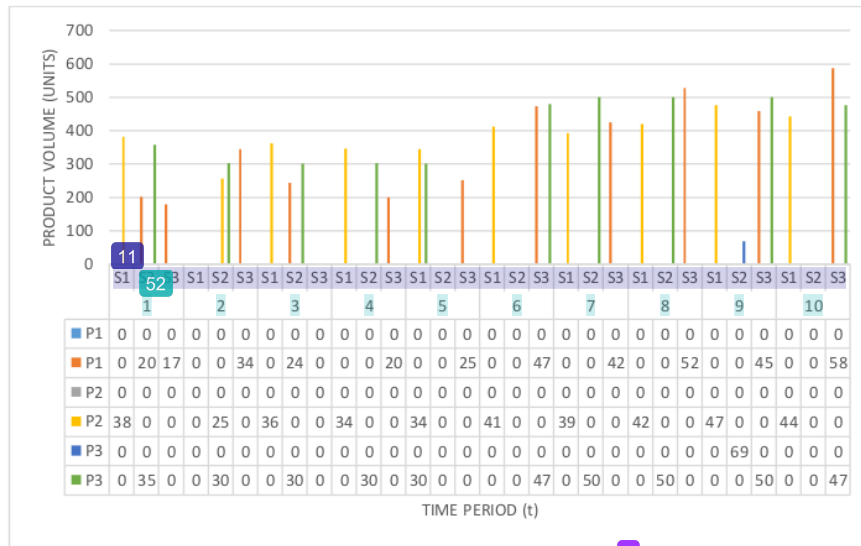
Gambar 4.9. Permintaan produk (P1, P2, P3 merujuk p1, p2, p3)

Disini model dievaluasi untuk 10 periode waktu yaitu. Solusi optimalisasi (4.42) yaitu volume produk optimal yang dibeli dari semua pemasok untuk periode waktu 1 sampai 10, dirangkum dalam Gambar 4.10. Dari Gambar 4.10, dapat dilihat bahwa pada periode waktu 1, volume produk yang dibeli optimal adalah 381 unit p2 dari s1, 201 unit dari unit s2 358 p3 dari s2 dan 179 unit dari s3. Tingkat persediaan

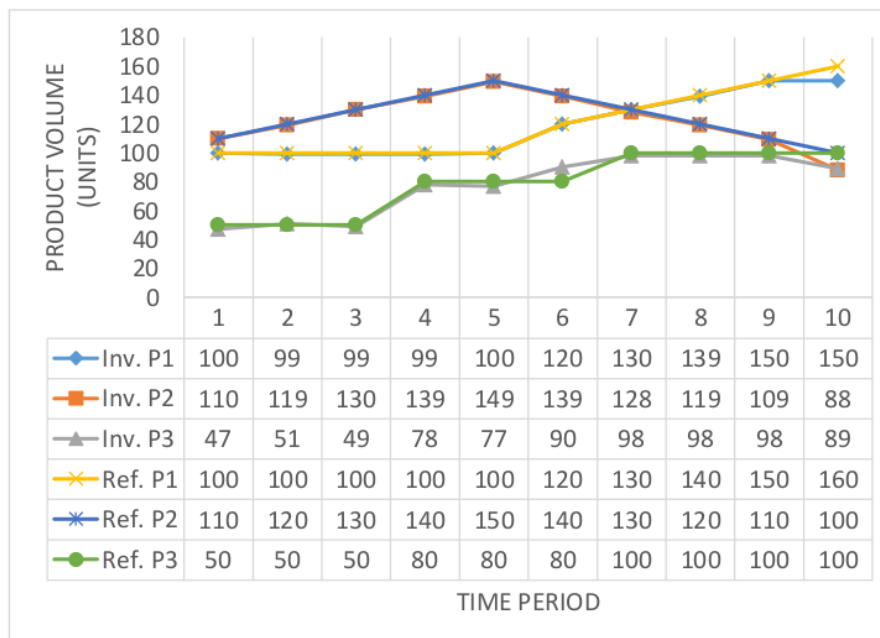
pada periode waktu 1 adalah (100,110,47) unit dimana tingkat referensi. Evolusi tingkat persediaan semua produk dan tingkat referensi nya dapat dilihat pada Gambar 4.11. Hal ini dapat dilihat bahwa tingkat persediaan sebenarnya mengikuti tingkat referensi dengan baik.

Tabel 4.13. Biaya pembelian & kapasitas pemasok

Pemasok	Produk	Biaya Pembelian level 1		Biaya Pembelian level 2		Kapasitas Pemasok (units/period)
		Biaya (\$/unit)	Volume Produksi (units)	Biaya (\$/unit)	Volume Produksi (units)	
s_1	p_1	20	≤ 250	20	> 250	500
	p_2	21	≤ 200	20	> 200	700
	p_3	21	≤ 300	21	> 300	600
s_2	p_1	21	≤ 100	20	> 100	600
	p_2	22	≤ 250	21	> 250	400
	p_3	21	≤ 300	20	> 300	500
s_3	p_1	22	≤ 150	20	> 150	700
	p_2	21	≤ 250	21	> 250	700
	p_3	22	≤ 350	20	> 350	500



Gambar 4.10. Volume Produk Optimal yang Dibeli dari Pemasok (S1, S2, S3 merujuk pada s_1, s_2, s_3 ; DL1, DL2 merujuk pada tingkat diskon 1, tingkat diskon 2)



Gambar 4.11. Evolusi tingkat persediaan produk dan tingkat rujukannya

BAB 5

MODEL DINAMIK DENGAN PARAMETER RANDOM

Pada bab ini diberikan model dinamik dengan parameter random, yang secara lebih rinci diuraikan menjadi beberapa subagian yaitu formulasi model matematis dari model dengan parameter random, kendali optimal dengan parameter random, dan simulasi model dengan parameter random di bidang industri manufaktur.

5.1. Formulasi Model dengan Parameter Random

Model 1.

Sistem persediaan yang dibahas adalah sistem persediaan produk tunggal dengan pemasok tunggal dan permintaan yang tidak pasti dimana ketidakpastian permintaan akan diasumsikan sebagai variabel acak dengan beberapa distribusi probabilitas. Misalkan $y(k)$ adalah tingkat persediaan produk (barang) di gudang dalam suatu periode waktu pengamatan k . Dinamika penawaran bergantung pada barang yang berasal dari pemasok dan permintaan d . Pada artikel ini, kita memiliki asumsi bahwa permintaan d adalah variabel acak dan tingkat persediaan sebelum pengamatan adalah 0, untuk $k < 0, y(k) = 0$. Misalkan $u(k)$ adalah jumlah barang yang berasal dari pemasok ke gudang di period k . Model dasar sistem ini tanpa permintaan acak diberikan di [2]. Inventori dinamis $y(k)$ di gudang dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} y(k) &= u(0) + u(1) + u(2) + \dots + u(k - L_p - 1) - d(1) - d(2) - \dots - d(k - 1) \\ &= \sum_{j=0}^{k-L_p-1} u(j) - \sum_{j=0}^{k-1} d(j) \end{aligned} \quad (5.1)$$

dimana L_p adalah *lead time* pengiriman barang dari supplier ke gudang. Tingkat persediaan target adalah jumlah tuntutan pada variabel keadaan pertama yang dilambangkan sebagai $x_{d1}(k) = y_d(k)$ dan $x_j(k) = u(k - L_p + j)$ untuk $j = 2, 3, \dots, L_p + 1$, maka (5.1) dapat disajikan ke dalam sistem sistem ruang keadaan berikut :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B} \begin{bmatrix} u(k) \\ d(k) \end{bmatrix} \\ y(k) &= \mathbf{C}'x(k) \end{aligned} \quad (5.2)$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Di sini, sistem (5.2) dapat disajikan sebagai

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{(n-1)}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ d(k) \end{bmatrix} \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{(n-1)}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Sistem persediaan yang disajikan oleh sistem (5.2) akan dikendalikan sehingga output sistem dengan tingkat persediaan mendekati tingkat persediaan yang diinginkan y_d sedekat mungkin. Diasumsikan bahwa komponen biaya terdiri dari biaya pembelian per unit produk dari pemasok dan biaya penyimpanan per unit produk. Misalkan saja biaya pembelian per unit produk P_c dan biaya penyimpanan per unit produk H_c sehingga total biaya per unit produk per periode $k = 0, 1, 2, 3, \dots, k-1$ adalah

$$O_c = \sum_{j=0}^{k-1} P_c u(j) + \sum_{j=0}^{k-1} H_c u(j) = \sum_{j=0}^{k-1} Q_c u(j). \quad (5.4)$$

Dengan $Q_c = P_c + H_c$.

Model 2.

Misalkan S menunjukkan jumlah pemasok. Misalkan $X_{t,s}$ menunjukkan volume produk yang dibeli dari pemasok pada periode waktu t . Misalkan I_t menunjukkan tingkat persediaan produk pada periode

waktu t . Komponen biaya dalam masalah ini adalah biaya pembelian dan biaya penahanan. Misalkan $U_{t,s}$ biaya pembelian untuk produk per unit dari pemasok pada periode waktu t dan H_t merupakan biaya penyimpanan per unit produk pada periode waktu t . Akhirnya dimisalkan D_t merupakan variabel acak untuk permintaan produk.

Untuk mengendalikan tingkat persediaan sedemikian rupa sehingga mendekati tingkat referensi pada periode waktu t , kita menentukan tujuan referensi lintasan $(I_t - r_t)^2$ dan kita mendefinisikan total fungsi biaya sebagai berikut

$$\sum_{i=1}^{\Omega} \left[\Pr_i \cdot \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S U_{t,s} X_{t,s} + \sum_{t=1}^T H_t I_t + \sum_{t=1}^T (I_t - r_t)^2 \right) \right] \quad (5.5)$$

Di mana $\Pr_i$ adalah probabilitas skenario i dan Ω melambangkan ruang kejadian dari variabel acak yang diberikan. Untuk memastikan bahwa permintaan setiap produk terpenuhi pada setiap periode waktu, maka kita memiliki kendala pertama sebagai berikut

$$I_{t-1} + \sum_{s=1}^S X_{t,s} - I_t \geq D_t, \forall t \in T. \quad (5.6)$$

Misalkan pemasok s memiliki kapasitas maksimum C_s untuk memasok produk untuk jangka waktusebarang t , maka kita memiliki kendala kedua sebagai berikut

$$X_{t,s} \leq C_s, \forall t \in T, \forall s \in S. \quad (5.7)$$

Untuk jangka waktu sebarang, jika persediaan memiliki unit kapasitas maksimum M unit, maka kita memiliki batasan ketiga sebagai berikut

$$I_t \leq M, \forall t \in T. \quad (5.8)$$

kendala integer untuk volume produk yang dibeli bisa dituliskan sebagai berikut

$$X_{t,s} \in \{0, 1, 2, \dots\}, \forall t \in T, \forall s \in S. \quad (5.9)$$

Oleh karena itu model matematis dari masalah ini dapat ditulis ulang sebagai berikut

$$\min \sum_{i=1}^{\Omega} \left[\Pr_i \cdot \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S U_{t,s} X_{t,s} + \sum_{t=1}^T H_t I_t + \sum_{t=1}^T (I_t - r_t)^2 \right) \right] \quad (5.10)$$

terhadap:

$$I_{t-1} + \sum_{s=1}^S X_{t,s} - I_t \geq D_t, \forall t \in T, \quad (5.11)$$

$$X_{t,s} \leq C_s, \forall t \in T, \forall s \in S, \quad (5.12)$$

$$I_t \leq M, \forall t \in T, \quad (5.13)$$

$$X_{t,s} \in \{0, 1, 2, \dots\}, \forall t \in T, \forall s \in S. \quad (5.14)$$

Model 3.

Kami merumuskan model matematis pemilihan pemasok dan sistem persediaan dengan diskon produk di lingkungan probabilistik dimana biaya pembelian dan permintaan produk acak dengan distribusi probabilitas yang diketahui. Misalkan P_i menunjukkan probabilitas skenario $i \in \Omega$ dan Ω menunjukkan ruang kejadian dari masalah tersebut untuk setiap periode waktu. Misalkan jumlah pemasok adalah S dan jumlah periode waktu yang akan dipecahkan masalahnya T . Misalkan $X_{t,s}$ menunjukkan volume produk yang dibeli dari pemasok s pada periode waktu t dan menunjukkan biaya pembelian per unit dari pemasok pada saat periode t . Misalkan H_t menunjukkan biaya penahanan per unit pada periode waktu t , D_t menunjukkan permintaan produk pada periode waktu t dan I_t menunjukkan tingkat persediaan produk pada periode waktu t . Pengambil keputusan memutuskan bahwa tingkat persediaan akan dikendalikan sehingga akan berada pada titik tertentu sedekat mungkin dengan titik acuan yang diberikan oleh pengambil keputusan. Misalkan r_t menunjukkan titik acuan pada periode waktu t dan $(I_t - r_t)^2$ menjadi tujuan pelacakan referensi. Kami meminimalkan total biaya dan tujuan pelacakan referensi sebagai berikut

$$\min \begin{cases} \sum_{i=1}^{\Omega} \left(P_i \cdot \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S U_{t,s}^{(1)} X_{t,s} + \sum_{t=1}^T H_t I_t + \sum_{t=1}^T (I_t - r_t)^2 \right] \right), & \text{if } d_s^{(0)} < X_{t,s} \leq d_s^{(1)} \\ \sum_{i=1}^{\Omega} \left(P_i \cdot \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S U_{t,s}^{(2)} X_{t,s} + \sum_{t=1}^T H_t I_t + \sum_{t=1}^T (I_t - r_t)^2 \right] \right), & \text{if } d_s^{(1)} < X_{t,s} \leq d_s^{(1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{\Omega} \left(P_i \cdot \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S U_{t,s}^{(J)} X_{t,s} + \sum_{t=1}^T H_t I_t + \sum_{t=1}^T (I_t - r_t)^2 \right] \right), & \text{if } d_s^{(J-1)} < X_{t,s} \leq d_s^{(J)} \end{cases} \quad (5.15)$$

Atau dapat disajikan sebagai

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{\Omega} \left[P_i \cdot \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S U_{t,s}^{(j)} X_{t,s} + \sum_{t=1}^T H_t I_t + \sum_{t=1}^T (I_t - r_t)^2 \right) \right] \right\}, \text{ if } d_s^{(j-1)} < X_{t,s} \leq d_s^{(j)} \quad (5.16)$$

dimana diskon untuk biaya pembelian menggunakan skema berikut

$$U_{t,s} = \begin{cases} U_{t,s}^{(1)}, & \text{if } d_s^{(0)} < X_{t,s} \leq d_s^{(1)} \\ U_{t,s}^{(2)}, & \text{if } d_s^{(1)} < X_{t,s} \leq d_s^{(2)} \\ \vdots & \\ U_{t,s}^{(J)}, & \text{if } d_s^{(J-1)} < X_{t,s} \leq d_s^{(J)} \end{cases}, \forall t \in T, \forall s \in S \quad (5.17)$$

atau dapat ditulis ulang sebagai berikut

$$U_{t,s} = U_{t,s}^{(j)}, \text{ if } d_s^{(j-1)} < X_{t,s} \leq d_s^{(j)}, \forall t \in T, \forall s \in S \quad (5.18)$$

dengan $d_s^{(j)}, j=0,1,2,\dots,J$ adalah tingkat harga untuk skema diskon ini.

Kendala model dapat dijelaskan sebagai berikut. Kendala

$$I_{t-1} + \sum_{s=1}^S X_{t,s} - I_t \geq D_t, \forall t \in T \quad (5.19)$$

digunakan untuk memastikan bahwa produk dalam penyimpanan dan produk yang dibeli akan memenuhi permintaan. Kendala

$$X_{t,s} \leq C_s, \forall t \in T, \forall s \in S \quad (5.20)$$

digunakan untuk memastikan bahwa pemasok bentuk produk yang dibeli tidak lebih dari kapasitas pemasok C_s . Misalkan kapasitas penyimpanan maksimal M , maka kendala

$$I_t \leq M, \forall t \in T \quad (5.21)$$

digunakan untuk memastikan bahwa tingkat persediaan tidak melebihi kapasitas penyimpanan. Akhirnya, kita memiliki kendala terakhir yaitu kendala integer untuk volume produk yang dibeli sebagai berikut

$$X_{t,s} \in \{0,1,2,\dots\}, \forall t \in T, \forall s \in S. \quad (5.22)$$

Model 4.

Masalah dengan nilai semua parameter diketahui dengan pasti lebih sederhana daripada masalah dengan parameter yang tidak pasti. Tapi faktanya, ada banyak parameter yang tidak pasti. Nilai permintaan

dari pelanggan bisa dipastikan, tidak pasti atau keduanya. Pada bagian ini, penulis merumuskan model matematis untuk masing-masing lingkungan ini.

Dengan adanya masalah pemilihan pemasok multi-produk, multi-pemasok dan multi-periode. Biarkan simbol parameter dan variabel untuk masalah ini diberikan pada Tabel 5.1

Table 5.1. Parameter and variabel

Simbol	Deskripsi
p	Indeks produk
s	Indeks pemasok
t	Indeks periode waktu
$X_{t,s,p}$	Jumlah produk p yang dibeli dari pemasok s pada periode waktu t (unit)
$I_{t,p}$	Tingkat persediaan produk p pada periode waktu t (unit)
$U_{t,s,p}$	Biaya pembelian per unit produk p dari pemasok pada periode waktu t
$H_{t,p}$	Biaya penyimpanan per unit untuk produk p pada periode t
$D_{t,p}$	Permintaan produk p pada periode waktu t (unit)
$r_{t,p}$	Referensi Tingkat produksi p pada periode waktu t untuk tujuan pengendalian stok
$C_{s,p}$	Kapasitas maksimum pemasok s untuk memasok produk p (unit)

	Kapasitas penyimpanan
M_p	maksimum produk p per satuan periode waktu (unit)

Model diformulasikan untuk lingkungan probabilistik. Kasus ini terjadi bila setidaknya satu parameter menjadi tidak pasti. Ketidakpastian ini didekati dengan menggunakan distribusi probabilitas. Penulis akan memecahkan masalah ini dengan menggunakan pemrograman multi tahap yang probabilistik dengan menghasilkan pohon skenario dan menentukan strategi optimal berdasarkan pohon skenario ini yang meminimalkan total biaya yang diharapkan. Misalkan P_i menunjukkan probabilitas skenario $i \in \Omega$ dan Ω menunjukkan ruang kejadian masalah untuk periode waktu tertentu. Untuk lingkungan probabilistik, penulis meminimalkan total biaya yang diharapkan yaitu

$$\min J \quad (5.23)$$

dengan

$$J = \sum_{i=1}^{\Omega} P_i \cdot \left[\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^P U_{t,s,p}^{(j)} X_{t,s,p} + \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P H_{t,p} I_{t,p} + \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P (I_{t,p} - r_{t,p})^2 \right] \quad (5.24)$$

jika $d_{s,p}^{(j-1)} < X_{t,s,p} \leq d_{s,p}^{(j)}$,

dan kendalanya sama dengan model pertama yaitu model untuk kasus deterministik. dimana diskon untuk biaya pembelian menggunakan skema berikut

$$U_{t,s,p} = \begin{cases} U_{t,s,p}^{(1)}, & \text{if } d_{s,p}^{(0)} < X_{t,s,p} \leq d_{s,p}^{(1)} \\ U_{t,s,p}^{(2)}, & \text{if } d_{s,p}^{(1)} < X_{t,s,p} \leq d_{s,p}^{(2)} \\ \vdots \\ U_{t,s,p}^{(J)}, & \text{if } d_{s,p}^{(J-1)} < X_{t,s,p} \leq d_{s,p}^{(J)} \end{cases} \quad (5.25)$$

untuk $\forall t \in T, \forall s \in S$, atau dapat ditulis ulang sebagai berikut

$$U_{t,s,p} = U_{t,s,p}^{(j)}, \text{ if } d_{s,p}^{(j-1)} < X_{t,s,p} \leq d_{s,p}^{(j)}, \quad (5.26)$$

untuk $\forall t \in T, \forall s \in S$ dengan $d_{s,p}^{(j)}, j=0,1,2,\dots,J$ adalah tingkat harga untuk skema diskon ini.

Kendala model dapat dijelaskan sebagai berikut. Kendala

$$I_{t-1,p} + \sum_{s=1}^S X_{t,s,p} - I_{t,p} \geq D_{t,p}, \forall t \in T, \forall p \in P \quad (5.27)$$

digunakan untuk memastikan bahwa produk dalam penyimpanan dan produk yang dibeli akan memenuhi permintaan. Kendala

$$X_{t,s,p} \leq C_{s,p}, \forall t \in T, \forall s \in S, \forall p \in P \quad (5.28)$$

digunakan untuk memastikan bahwa produk yang dibeli dari pemasok s tidak lebih dari kapasitas pemasok C_s . Misalkan kapasitas maksimal dari penyimpanan tersebut M , maka kendala

$$I_{t,p} \leq M_p, \forall t \in T, \forall p \in P \quad (5.29)$$

digunakan untuk memastikan bahwa tingkat persediaan tidak melebihi kapasitas penyimpanan. Akhirnya, kendala terakhir yaitu kendala integer untuk volume produk yang dibeli dirumuskan sebagai berikut

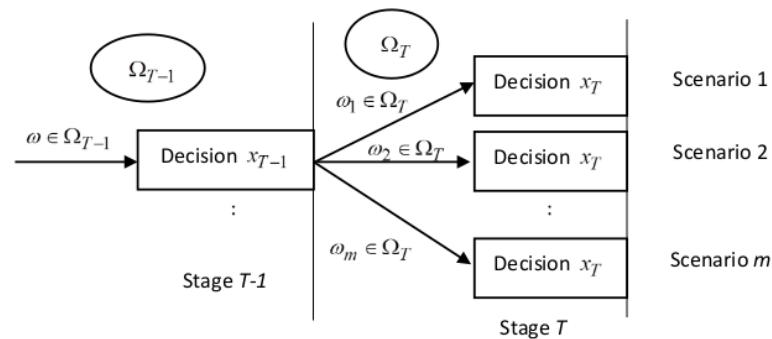
$$X_{t,s,p} \in \{0,1,2,\dots\}, \forall t \in T, \forall s \in S, \forall p \in P. \quad (5.30)$$

5.2. Kendali Optimal dengan Parameter Random

Pendekatan Stochastic Dynamic Programming.

Pemrograman dinamis atau pemrograman multi tahap dapat digunakan untuk memecahkan banyak masalah optimasi yang memiliki beberapa karakteristik yang menjadi masalah dapat dibagi menjadi beberapa tahap dengan keputusan untuk setiap tahap diperlukan, setiap tahap memiliki beberapa negara asosiasi, keputusan pada tahap menggambarkan bagaimana negara pada tahap saat ini ditransformasikan menjadi negara untuk tahap berikutnya, ia memiliki prinsip optimalitas dan ada fungsi rekursi untuk tahap-tahapnya. Pemrograman dinamis dapat dibagi menjadi dua kelas yang deterministik dimana semua informasi diketahui dengan pasti, dan stokastik dimana setidaknya satu parameter tidak pasti / acak. Pemrograman dinamis stokastik dapat diatasi dengan menghasilkan skenario masalah dan pengerjaan iterasi maju/mundur.

Untuk menggambarkan pemrograman dinamis stokastik, misalkan t menunjukkan tahap biasanya periode waktu dari masalah, T menunjukkan jumlah tahap, x_t menunjukkan keputusan pada periode waktu t dan Ω_t menunjukkan ruang acara pada periode waktu t . Keputusan awal diambil. Pada tahap 0 dan keputusan recourse diambil secara bertahap 2, 3, ..., T . Skenario digunakan untuk mengungkapkan hasil yang mungkin, biasanya biaya / keuntungan, berdasarkan realisasi distribusi probabilitas. Skenario menyajikan satu kemungkinan realisasi masa depan dan pencacahan semua kemungkinan kombinasi hasil. Untuk ruang kejadian diskrit, semua skenario, yang disebut pohon skenario, dapat diilustrasikan oleh Gambar 5.1. Untuk ruang kejadian kontinu atau diskrit namun tak terbatas, pohon skenario dapat dihasilkan dengan menggunakan metode sampling, contoh Monte Carlo misalnya, untuk memperkirakan kemungkinan hasil dengan menggunakan pohon skenario yang terbatas.



Gambar 5.1. Pohon Skenario pemrograman dinamis stokastik dengan ruang kejadian diskrit

Beberapa alat pengoptimalan dapat digunakan untuk menyelesaikan pemrograman dinamis stokastik dengan menghasilkan pohon skenario. Dalam buku ini, kami menggunakan LINGO untuk memecahkan optimisasi stokastik dinamis (5.29).

5.3 Simulasi Model dengan Parameter Random di Industri Manufaktur

Simulasi Mode 1.

Model Kontrol prediktif yang kokoh yang biasa kita gunakan untuk mengendalikan sistem persediaan yang diberikan pada bagian sebelumnya adalah mengikuti MPC kuat yang diberikan oleh [9].

Pertimbangkan *plant* (5.2) di mana d adalah *white noise* dengan matriks kovarian $E(dd^T) = W \geq 0$, dan d seharusnya merupakan gangguan. Dengan menerapkan filter Kalman, estimasi keadaan filter yang optimal dapat ditulis sebagai

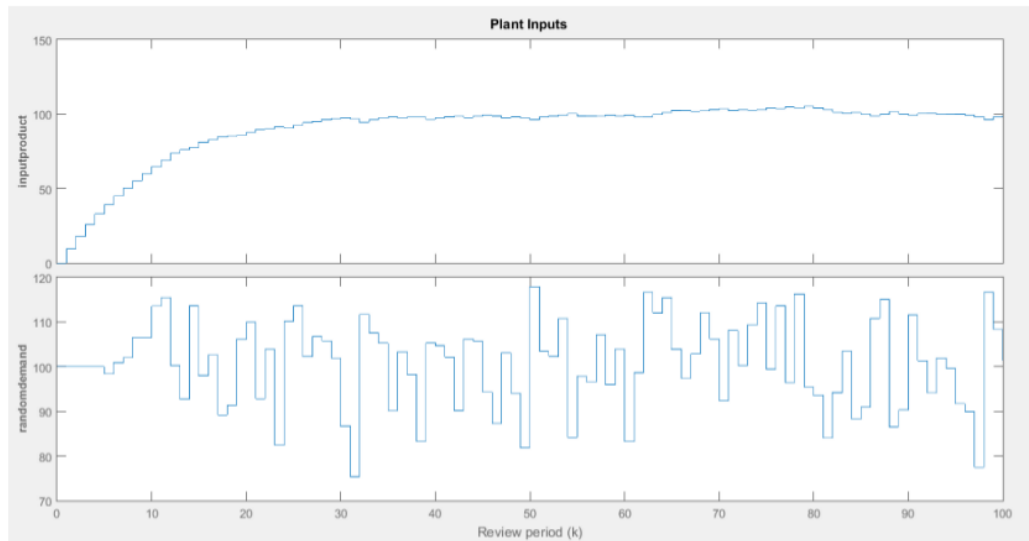
$$\hat{x}(6-1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad (5.31)$$

$$\hat{x}(t+l) = A\hat{x}(x+l-1) + B\hat{u}(k+l-1) \text{ for } l > 1.$$

Dengan memprediksi keadaan masa depan, input dan output dan mengganti vektor prediksi menjadi fungsi objektif

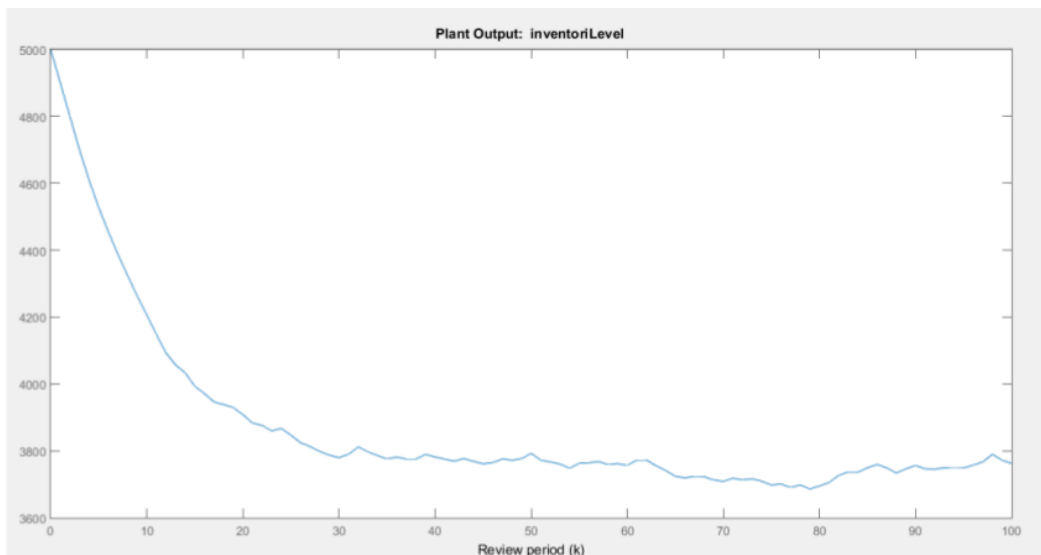
$$J(t) = \sum_{k=0}^{N_y} \left(y(t+k) - y_{ref} \right)^T Q_k \left(y(t+k) - y_{ref} \right) + \sum_{k=0}^{N_y} u(t+k)^T R_k u(t+k) \quad (5.32)$$

dengan $Q = \text{blockdiag} \{ Q_i \}_{i=0,1,\dots,N_y}$, $R = \text{blockdiag} \{ R_i \}_{i=0,1,\dots,N_y}$, maka kontrol optimal dapat diperoleh dengan meminimalkan J dengan menggunakan pemrograman kuadratik. Untuk melakukan metode kontrol ini, kita menggunakan toolbox kontrol prediktif model pada MATLAB dan simulasi dengan data yang dihasilkan berikut ini. Misalkan biaya pembelian produk adalah 1000 per unit dan biaya penyimpanan di gudang adalah 100 per unit. Pemasok bisa mengantarkan barang hingga 20000 unit. Kapasitas gudang maksimal adalah 50000 unit. Biarkan tingkat persediaan awal produk adalah 5000 unit dan permintaan mengikuti distribusi Gaussian dengan kondisi awal 100 unit. Hasil simulasi diberikan pada Gambar 5.2-5.3.



Gambar 5.2. Input optimal (shipment) $u(k)$ dan permintaan random $d(k)$

Gambar 5.2 menunjukkan masukan optimal atau strategi optimal yang dihasilkan oleh MPC yang kuat. Jika input optimal atau strategi optimal yang ditunjukkan oleh Gambar 5.2 diterapkan pada sistem persediaan ini, akan mempengaruhi output yang merupakan dinamika tingkat stok untuk produk yang diberikan oleh Gambar 5.3.



Gambar 5.3. Output: tingkat inventori produk

Gambar 5.3 menunjukkan dinamika tingkat stok untuk produk. Nilai awal dari tingkat persediaan produk adalah 5000 item, setelah memenuhi permintaan dan menerima produk dari pemasok pada hari ke 1 sampai 30, nilai tersebut cukup tertutup sampai tingkat yang diinginkan yaitu sekitar 3.800 item.

Simulasi Model 2. Distribusi Probabilitas diskret

Percobaan numerik pertama, asumsikan bahwa distribusi probabilitas dari variabel acak bersifat diskrit. Misalkan ada dua pemasok yaitu s_1 dan s_2 . Kami akan memecahkan masalah ini selama 3 periode. Misalkan biaya pembelian dari pemasok s_1 adalah \$ 12 per unit untuk setiap periode waktu 1, 2 dan 3. Untuk periode waktu-1, biaya pembelian dari pemasok s_2 adalah \$ 10 per unit, namun untuk setiap periode waktu 2 dan 3, Biaya pembelian acak dengan distribusi probabilitas yang diberikan oleh Tabel 5.1.

Tabel 5.1. Distribusi Probabilitas biaya pembelian s_2 untuk periode waktu 2 and 3

Probabilitas	Biaya pembelian (\$/unit/periode)
0.5	10
0.5	12

Kapasitas pemasok untuk masing-masing pemasok s_1 dan 200 unit per periode. Biarkan tingkat persediaan awal adalah 0 item, biaya penahanan produk adalah \$ 1 / unit / periode, kapasitas maksimum gudang adalah 200 unit / periode dan tingkat persediaan referensi adalah 100 unit untuk semua periode waktu. Permintaan untuk periode 1 diketahui yaitu 100 unit dan permintaan untuk masing-masing periode 2 dan 3 acak dengan distribusi probabilitas yang diberikan oleh Tabel 5.2.

Table 5.2. Distribusi Peluang Permintaan untuk Periode 2 and 3

Probabilitas	Permintaan(unit/periode)
0.5	100
0.3	120
0.2	150

Pembuat keputusan menginginkan agar tingkat persediaan / stok harus berada pada tingkat referensi sedekat mungkin dengan biaya minimal. Kami memecahkan masalah optimasi (5.29) pada Windows 8 AMD A6 2.7GHz dan 2GB Memory dengan menggunakan software LINGO 15.0 dimana stochastic model class adalah multi stage stochastic dan kelas modelnya adalah MIQP (mixed integer quadratic programming). Program dinamis stokastik ini memiliki 36 skenario seperti ditunjukkan oleh Tabel 5.3.

Table 5.3. Skenarios masalah

Skenario	Periode waktu (t)	Biaya pembelian untuk s_2 (\$)	Permintaan (unit)	$X_{t,s}$		Inventory (unit)	Probabilitas	Biaya total (\$)
				s_1	s_2			
1	1	12	100	0	199	99	0.0625	4270
	2	10	100	0	100	99		

	3	10	100	0	96	95		
2	1	12	100	0	199	99	0.0625	4490
	2	10	100	0	100	99		
	3	12	100	100	0	99		
3	1	12	100	0	199	99	0.0375	4470
	2	10	100	0	100	99		
	3	10	120	0	115	94		
4	1	12	100	0	199	99	0.0375	4700
	2	10	100	0	100	99		
	3	12	120	115	0	94		
⋮								
36	1	12	100	0	199	99	0.01	5862
	2	12	150	149	0	98		
	3	12	150	146	0	94		

Solusi awal yaitu strategi optimal untuk jangka waktu 1 adalah 0 unit yang dibeli dari s1 dan 199 unit yang dibeli dari s2. Untuk jangka waktu 2, strategi optimal dapat diputuskan setelah kejadian variabel acak dalam jangka waktu 2 terungkap. Akhirnya, strategi optimal untuk periode waktu 3 dapat diputuskan setelah kejadian variabel acak dalam jangka waktu 3 terungkap. Dari hasil tersebut, total biaya yang diharapkan adalah \$ 4819 yang diperoleh dari probabilitas dan total biaya untuk semua skenario, yaitu

$$0.0625 \cdot 4270 + 0.0625 \cdot 4490 + 0.0375 \cdot 4470 + 0.0375 \cdot 4700 + \dots + 0.0100 \cdot 5862 = 4819.$$

Untuk menggambarkan bagaimana strategi optimal untuk setiap periode waktu diputuskan, biarkan permintaan untuk periode 2 adalah 100 unit dan biaya pembelian untuk s2 untuk periode waktu 2 adalah \$ 10 / unit, maka kita harus membeli 0 unit dari s1 dan 100 unit dari s2 and Tingkat persediaan untuk periode 2 adalah 99 unit. Biarkan permintaan untuk periode 3 adalah 120 unit dan biaya pembelian untuk s2 adalah

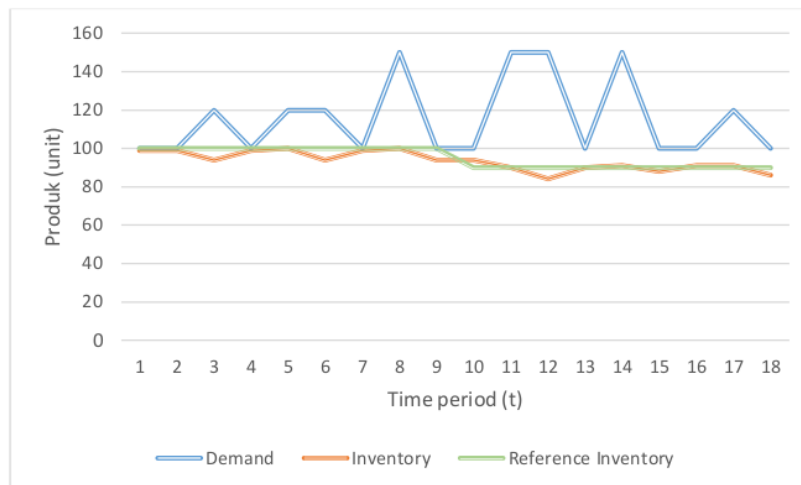
\$ 12 / unit, maka kita harus membeli 115 unit dari s1 dan membeli 0 unit dari s2. Solusi ini diilustrasikan dengan Tabel 5.4.

Tabel 5.4. Ilustrasi solusi

Periode waktu(t)	Biaya pembelian untuk s_2 (\$)	Permintaan ($demand$) (unit)	$X_{t,s}$		Inventory	Reference Inventory
			s_1	s_2		
1	12	100	0	199	99	100
2	10	100	0	100	99	100
3	12	120	115	0	94	100

32

Dari Tabel 5.4, dapat dilihat bahwa pada setiap periode 1 dan 2, s2is pemasok optimal dan pada periode waktu 3, s1 adalah pemasok optimal. Bisa juga dilihat bahwa tingkat persediaan tertutup terhadap rujukan.



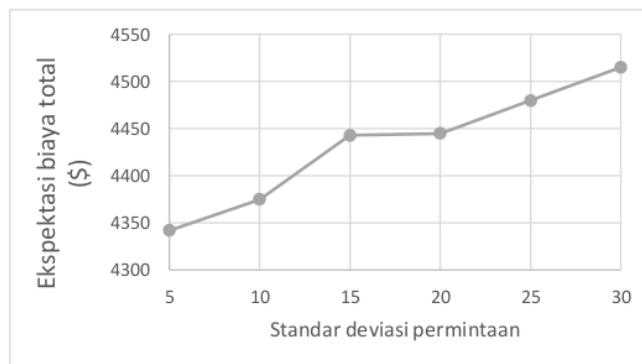
Gambar 5.3. Evolusi persediaan, persediaan dan inventori rujukan

Untuk mengevaluasi dan mensimulasikan evolusi tingkat persediaan dengan beberapa titik acuan, kita mensimulasikan model untuk 18 periode waktu yang ditunjukkan oleh Gambar 5.3. Dapat dilihat bahwa tingkat inventori / stok produk mengikuti titik acuan.

4.2. Distribusi probabilitas kontinu

Untuk contoh kedua, anggaplah bahwa biaya pembelian dari s_2 untuk setiap periode waktu 2 dan 3 terdistribusi normal dengan mean 10 dan standar deviasi 4, permintaan untuk masing-masing periode 2 dan 3 didistribusikan secara normal dengan mean 100 dan standar deviasi 20 dan parameter yang tersisa sama contoh pertama. Kami memecahkan masalah ini dengan menggunakan LINGO dimana skenario dihasilkan dengan sampling Monte Carlo dimana ukuran sampelnya adalah 4. Dari hasil tersebut, total biaya yang diharapkan adalah \$ 4445.

Untuk analisis sensitivitas, misalkan permintaan terdistribusi normal dengan mean 100 dan standar deviasi $\sigma > 0$. Untuk mengamati dampak dari standar deviasi permintaan terhadap total biaya yang diharapkan, kami mengevaluasi model dengan $\sigma = 5, 10, 15, 20, 25$, dan 30. Total biaya yang diharapkan diberikan oleh Gambar 5.4.



Gambar 5.4. Dampak standard deviasi permintaan

Dari Gambar 5.4, dapat dilihat bahwa jika deviasi standar permintaan meningkat maka total biaya yang diharapkan juga akan meningkat. Hal ini disebabkan oleh meningkatnya ketidakpastian permintaan

atau nilai permintaan memiliki rentang yang luas. Jika deviasi standar permintaan lebih dari 30, kami memperkirakan bahwa total biaya yang diharapkan akan meningkat.

Simulasi Model 3.

Misalkan ada dua pemasok yang s_1 dan s_2 yang akan memasok produk ke produsen. Kami menyelesaikan masalah selama 3 periode dimana semua parameter pada periode 1 diketahui dengan pasti namun permintaan dan biaya pembelian dari pemasok untuk periode 2 dan 3 adalah acak. Biaya pembelian dan kapasitas pemasok diberikan oleh Tabel 5.5 dan Tabel 5.6. Biaya pembelian $U_{t,2}^{(1)}$ dan $U_{t,2}^{(2)}$ acak dimana distribusi probabilitasnya diberikan oleh Tabel 5.7 dan Tabel 5.8. Ter permintaan untuk periode 1 diketahui yaitu 90 unit dan permintaan untuk masing-masing periode 2 dan 3 acak dengan distribusi probabilitas yang diberikan oleh Tabel 5.9. Biarkan tingkat persediaan awal adalah 0 item dan biaya holding adalah \$ 1 / unit / periode. Akhirnya, kapasitas gudang maksimal adalah 200 unit / periode. Pembuat keputusan menginginkan agar tingkat persediaan / stok harus berada pada titik tertentu sedekat mungkin dengan titik referensi yaitu 100 unit untuk jangka waktu tertentu dengan biaya minimal.

Tabel 5.5. Biaya pembelian & kapasitas pemasok untuk periode waktu 1

Pemasok	Biaya pembelian	Kapasitas pemasok (unit/periode)
s_1	$\begin{cases} \$11 & \text{if } X_{t,1} \leq 100 \\ \$9 & \text{if } X_{t,1} > 100 \end{cases}$	150
s_2	$\begin{cases} \$13 & \text{if } X_{t,2} \leq 150 \\ \$10 & \text{if } X_{t,2} > 150 \end{cases}$	200

Tabel 5.6. Biaya pembelian & kapasitas pemasok untuk periode waktu 2 dan 3

Pemasok	Biaya pembelian	Kapasitas pemasok (unit/periode)
s_1	$\begin{cases} \$11 & \text{if } X_{t,1} \leq 100 \\ \$13 & \text{if } X_{t,1} > 100 \end{cases}$	150
s_2	$\begin{cases} \$U_{t,2}^{(1)} & \text{if } X_{t,2} \leq 150 \\ \$U_{t,2}^{(2)} & \text{if } X_{t,2} > 150 \end{cases}$	200

Tabel 5.7. Distribusi probabilitas untuk $U_{t,2}^{(1)}$

Probabilitas	Biaya pembelian $U_{t,2}^{(1)}$ (\$/unit/periode)
0.6	12
0.4	10

Tabel 5.8. Distribusi probabilitas untuk $U_{t,2}^{(2)}$

Probabilitas	Biaya pembelian $U_{t,2}^{(2)}$ (\$/unit/period)
0.3	10
0.7	9

Tabel 5.9. Distribusi probabilitas permintaan untuk periode waktu 2 dan 3

Probabilitas	Permintaan (unit/periode)
0.3	80
0.7	100

Masalah optimasi (5.15) diselesaikan dengan Windows 8 OS, prosesor AMD A6 2,7 GHz dan memori 4 GB dengan menggunakan LINGO 15.0 dimana model stokastik adalah stokastik *multi stage* dan kelas modelnya adalah PIQP (*pure integer quadratic programming* (program kuadrat integer murni)). Kemudian dengan menggunakan metode pemrograman dinamis stokastik, kita menghasilkan skenario masalah yang diilustrasikan oleh Gambar 2. Masalah ini memiliki 64 skenario seperti yang ditunjukkan pada Tabel 5.10. Nilai fungsi objektif (5.15) disebut sebagai jumlah yang diharapkan biaya yang merupakan jumlah dari perkalian probabilitas skenario dan total biaya skenario. Total biaya yang diperkirakan minimal dari masalah ini adalah \$ 3716 yang diberikan oleh $0.0029 \cdot \$3489 + 0.0068 \cdot \$3644 + 0.0068 \cdot \$3465 + \dots + 0.038 \cdot \3824 .

Tabel 5.10. Skenario masalah

Skenario	Periode waktu(<i>t</i>)	Biaya pembelian untuk <i>s</i> ₂ (<i>U</i> _{<i>t</i>,2} ⁽¹⁾ , <i>U</i> _{<i>t</i>,2} ⁽²⁾) (\$)	Permintaan (unit)	<i>X</i> _{<i>t,s</i>}		<i>Inventory</i> (unit)	Probabilitas	Total biaya (\$)
				<i>s</i> ₁	<i>s</i> ₂			
1	1	(13,10)	90	150	39	99	0.0029	3489
	2	(12,10)	80	81	0	100		
	3	(12,10)	80	80	0	100		
2	1	(13,10)	90	150	39	99	0.0068	3644
	2	(12,10)	80	81	0	100		
	3	(12,10)	100	95	0	95		
3	1	(13,10)	90	150	39	99	0.0068	3465
	2	(12,10)	80	81	0	100		
	3	(12,9)	80	76	0	96		
⋮								
36	1	(13,10)	90	150	39	99	0.038	3824
	2	(10,9)	100	0	101	100		
	3	(10,9)	100	95	0	95		

Dari Tabel 5.10, dapat dilihat bahwa solusi awal yaitu solusi untuk jangka waktu 1 adalah 150 unit yang dibeli dari s_1 dan 39 unit yang dibeli dari s_2 yang akan menghasilkan 99 unit pada persediaan. Strategi optimal untuk periode 2 dan 3 dapat diilustrasikan pada Tabel 5.11 setelah variabel acak untuk periode 2 dan 3 terungkap.

Tabel 5.11 Ilustrasi solusi

Periode waktu (<i>t</i>)	Biaya pembelian untuk s_2 ($U_{t,2}^{(1)}, U_{t,2}^{(2)}$) dalam \$	Permintaan (unit)	$X_{t,s}$		Inventory	Inventory Rujukan
			s_1	s_2		
1	(13,10)	100	150	39	99	100

2	(12,10)	80	81	0	100	100
3	(10,9)	100	95	0	95	100

Strategi optimal untuk periode waktu 2 dapat diputuskan setelah variabel acak pada periode 2 terungkap. Biarkan permintaan untuk periode 2 adalah 80 unit dan biaya pembelian untuk s2 untuk periode waktu 2 adalah (\$ 12, \$ 10), maka kita harus membeli 81 unit dari s1 dan 0 unit dari tingkat persediaan dan untuk periode 2 adalah 100 unit. Strategi optimal untuk periode waktu 3 dapat diputuskan setelah variabel acak pada periode waktu 3 terungkap. Biarkan permintaan untuk periode 3 adalah 100 unit dan biaya pembelian pada periode waktu 3 dari pemasok s2 adalah (\$ 10, \$ 9), maka kita harus membeli 95 unit dari s1 dan membeli 0 unit dari s2 yang akan menghasilkan 95 unit dalam persediaan. Dari perbandingan antara tingkat persediaan / persediaan dan tingkat persediaan referensi, dapat dilihat bahwa tingkat inventori / stok produk mengikuti tingkat yang diinginkan dengan baik.

Untuk percobaan kedua, misalkan distribusi probabilitasnya $U_{2,2}^{(1)}$ normal dengan mean 10 dan varians 1 dan distribusi probabilitasnya $U_{3,2}^{(2)}$ normal dengan mean 10 dan varians 2. Distribusi probabilitas permintaan juga normal dengan mean 100 dan varians 10. Dari hasil, total biaya yang diharapkan adalah \$ 4445.

Simulasi Model 4.

Selanjutnya, diberikan percobaan numerik yang merupakan eksperimen numerik dalam lingkungan deterministik dimana semua parameter diketahui dengan pasti, eksperimen numerik di lingkungan probabilistik dimana parameter permintaan bersifat acak dan eksperimen numerik untuk tujuan analisis sensitivitas. Masalahnya adalah sebagai berikut. Misalkan produsen memiliki tiga pemasok yaitu s1, s2 dan s3 untuk memasok productsp1, p2 dan p3. Biaya pembelian untuk setiap produk dari masing-masing pemasok mempertimbangkan diskon seperti yang ditunjukkan pada Tabel 2. Misalkan tingkat persediaan awal untuk setiap produk adalah 0 item dan biaya penahanan adalah \$ 1 / unit / periode untuk p1, \$ 2 / unit / periode untuk p2 dan \$ 4 / unit / periode untuk p3. Akhirnya, kapasitas gudang maksimal 300 unit / periode untuk p1, 250 unit / periode untuk p2 dan 250 unit / periode untuk p3. Pembuat keputusan menginginkan agar tingkat persediaan / stok harus berada pada titik tertentu sedekat mungkin dengan tingkat referensi yang diberikan dalam hasil simulasi masing-masing. Penulis menyelesaikan semua eksperimen numerik di LINGO® 16.0 dengan OS Windows 8, prosesor AMD A6 2.7GHz dan Memori 4 GB.

Misalkan permintaan beberapa produk tidak pasti. Penulis mendekati ketidakpastian ini dengan distribusi probabilitas. Karena keterbatasan kapasitas komputer, penulis mengevaluasi model dengan jangka waktu 3-kali-3, variabel acak hanya permintaan produk p_t dengan dua sampel dimana distribusi probabilitas untuk $D_{t,1}, \forall t \in T$ diberikan oleh Tabel 8.

Tabel 5.12 Distribusi probabilitas untuk $D_{t,1}, \forall t \in T$

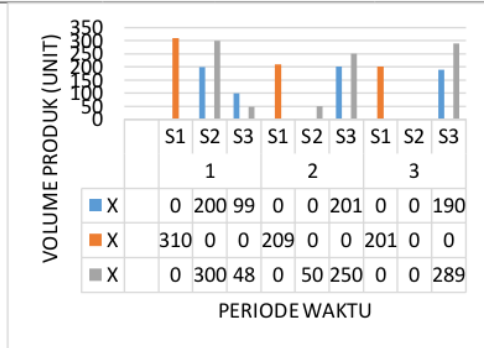
$D_{t,1}, \forall t \in T$	Probabilitas
200	0.4
300	0.6

Misalkan nilai permintaan untuk masing-masing 200 unit untuk setiap periode waktu dan nilai permintaan untuk p_3 adalah 300 unit untuk setiap periode waktu. Parameter yang tersisa mengikuti masalah pertama yaitu masalah saat permintaan sudah pasti. Penulis menyelesaikan masalah optimasi (5.23) di LINGO 16.0 dengan menggunakan pemrograman probabilisticmulti-stage dimana kelas modelnya adalah PIQP (pemrograman kuadrat murni kuadratik).

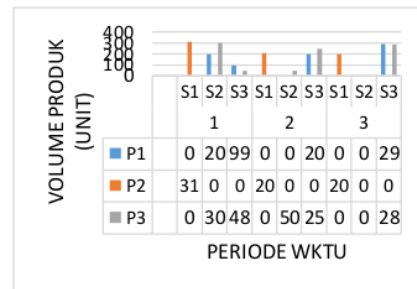
Tabel 5.13 Skenario untuk masalah dengan lingkungan probabilistik

Skenario	Periode waktu (t)	Permintaan p_t (unit)	Solusi	Inventory (unit)			Probabilitas	Total biaya(\$)
				p_1	p_2	p_3		
1	1	200	Gambar 5.a	99	110	48	0.064	48838
	2	200		100	119	48		
	3	200		90	120	37		
2	1	200	Gambar 5.b	99	110	48	0.096	50837
	2	200		100	119	48		
	3	300		90	119	37		
3	1	200	Gambar 5.c	99	110	48	0.096	50838
	2	300		100	120	48		
	3	200		89	119	39		

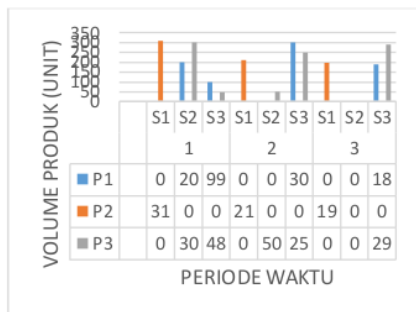
Skenario	Periode waktu <i>t</i>)	Permintaan <i>p₁</i> (unit)	Solusi	Inventory (unit)			Probabilitas	Total biaya(\$)
				<i>p₁</i>	<i>p₂</i>	<i>p₃</i>		
				⋮				
8	1	300	Gambar 5.d	100	110	47	0.216	54838
	2	300		100	120	48		
	3	300		90	119	38		



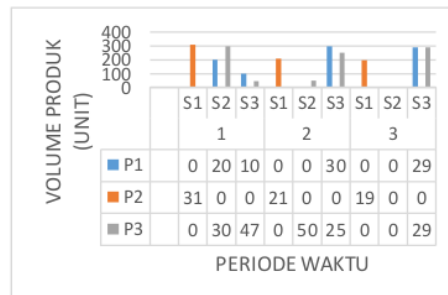
(a)



(b)

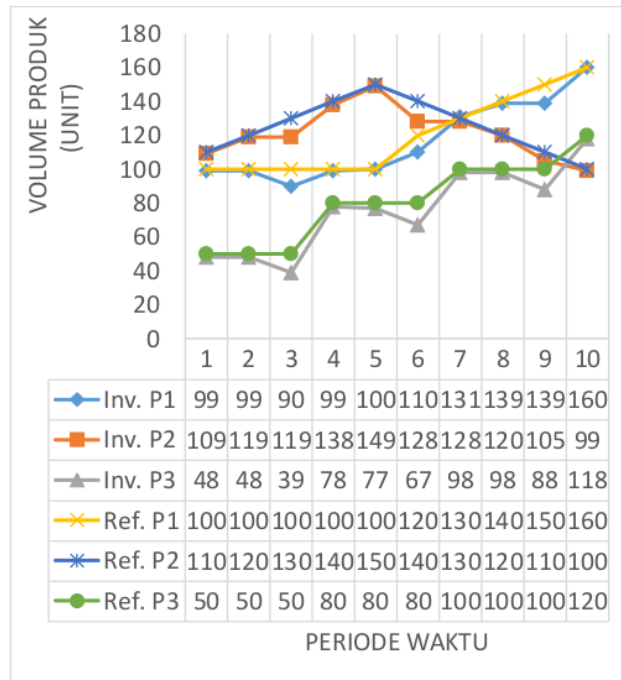


(c)



(d)

Gambar 5.4. Solusi dari masalah dengan lingkungan probabilistik



Gambar 5.5 Tingkat persediaan dan tingkat rujukan masing-masing produk

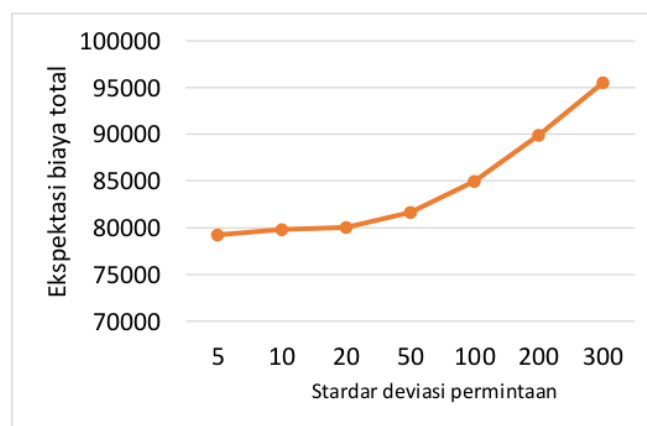
Pertama-tama, penulis mengevaluasi masalah ini hanya dalam 3 periode waktu dan (5.23) menghasilkan 8 skenario seperti ditunjukkan oleh Tabel 5.7. Nilai fungsi objektif (5.23) adalah total biaya yang diharapkan, yaitu jumlah perkalian probabilitas dari skenario dan total biaya skenario yaitu $(0,064) (\$ 48838) + (0,096) (\$ 50837) + \dots + (0,216) (\$ 54838) = \$ 52438$. Berdasarkan skenario yang diberikan pada Tabel 3, keputusan optimal pada suatu periode waktu dapat ditentukan setelah parameter acak untuk periode waktu yang sesuai terungkap. Sebagai contoh, biarkan permintaan p1 pada periode waktu 1 adalah 200 unit, maka keputusan optimalnya adalah membeli 310 unit p2 dari s1, 200 unit p1 dari s2, 300 unit p3 dari s2, 99 unit p1 dari s1 dan 48 unit p3 dari s3 (lihat Gambar 5a atau 5b atau 5c). Keputusan optimal untuk periode 2 dan 3 dapat ditentukan setelah permintaan p1 pada periode 2 dan 3 terungkap. Biarkan permintaan p1 pada periode waktu 2 adalah 300 dan 200 unit pada periode waktu 3 (lihat skenario 3). Kemudian, keputusan optimal pada periode 2 adalah pembelian 210 unit p2 dari s1, 50 unit p3 dari s2, 301 unit p1 dari s3 dan 250 unit p3 dari s3 sedangkan keputusan optimal pada periode waktu 3 adalah pembelian 199 unit dari p2 dari s1, 189 unit p1 dari s3, dan 291 unit p3 dari s3 (lihat Gambar 5.4c). Keputusan ini memberikan (99,110,48) unit (p1, p2, p3) dalam penyimpanan pada periode waktu 1 dimana tingkat referensi adalah

(10.110,50), (100,120,48) unit (p_1, p_2, p_3) di penyimpanan pada periode waktu 2 dimana tingkat referensi adalah (100,120,50), dan (89,119,39) unit (p_1, p_2, p_3) dalam penyimpanan pada periode waktu 3 dimana tingkat persediaan referensi adalah (100.130,50) unit. Dapat diamati bahwa untuk periode 1 dan 2, tingkat persediaan aktual untuk setiap produk ditutup sampai tingkat referensi. Untuk periode waktu 3, tingkat persediaan aktual mengikuti tingkat referensi meskipun ada celah yang cukup besar di antara keduanya. Hal itu disebabkan oleh periode waktu 3 adalah periode terakhir untuk optimasi. Oleh karena itu, model diputuskan untuk tidak menyimpan produk dalam persediaan untuk periode yang akan datang.

Untuk mengetahui bagaimana perbandingan antara tingkat persediaan masing-masing produk dan tingkat rujukannya, penulis mengevaluasi model tersebut selama 10 periode waktu dan hasilnya, yaitu tingkat persediaan dan tingkat referensi diberikan oleh Gambar 6. Dari Gambar 6, dapat Terlihat bahwa tingkat persediaan aktual setiap produk pada periode waktu 1,2, 4, 5, 7, 8 dan 10 sangat mendekati tingkat referensi, namun untuk periode waktu 3, 6 dan 9, tingkat persediaan aktual masing-masing produk cukup jauh dari referensi. Penulis mengamati bahwa hal ini disebabkan oleh jumlah evaluasi periode waktu yaitu 3 periode waktu untuk setiap evaluasi model yang berarti memberikan asumsi bahwa model tersebut hanya dioptimalkan untuk 3 periode waktu dan tidak ada optimalisasi setelah itu. .

Dampak Ketidakpastian Permintaan

Percobaan numerik terakhir digunakan untuk menganalisis dampak ketidakpastian permintaan terhadap total biaya yang diharapkan. Misalkan ketidakpastian permintaan untuk setiap produk terdistribusi normal dengan rata-rata 400 dan standar deviasi $\sigma > 0$. Penulis mengevaluasi model (5.23) dengan $\sigma = 10, 20, 50, 100, 200$ dimana ukuran sampel masing-masing variabel acak adalah 2 sampel.



Gambar 5.6. Dampak ketidakpastian permintaan terhadap ekspektasi biaya total

Dari Gambar 5.6, dapat dilihat bahwa total biaya yang diharapkan menjadi lebih besar jika tuntutan deviasi standar menjadi lebih besar. Hal itu disebabkan oleh berbagai tuntutan ketidakpastian yang semakin melebar.

DAFTAR PUSTAKA

Abbasi, M, R. Hosnavi, and B. Tabrizi, "An Integrated Structure for Supplier Selection and Configuration of Knowledge-Based Networks Using QFD , ANP , and Mixed-Integer Programming Model," vol. 2013, 2013.

Adi, P, "Optimal strategy for multi-product inventory system with supplier selection by using model predictive control," *Procedia Manuf.*, vol. 4, no. less, pp. 208–215, 2015.

Aksoy, A and N. Öztürk, "Supplier selection and performance evaluation in just-in-time production environments," *Expert Syst. Appl.*, vol. 38, no. 5, pp. 6351–6359, 2011.

Al Hokayem, P and E. Gallestey, "Lyapunov Stability Theory Lyapunov ' s Direct Method," no. 2, pp. 1–15, 2015.

Arda, Y and J.-C. Hennet, "Inventory control in a multi-supplier system," *Int. J. Production Economics*, vol. 104, pp. 249-259, 2006.

Bemporad, A . *Efficient conversion of mixed logical dynamical systems into an equivalent piecewise affine form*. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, 49(5):832 – 838, May 2004.

Bemporad, A and M. Morari. *Control of systems integrating logic, dynamic, and constraints*. Automatica, 35(3):407-427,1999.

Bemporad, A, "Hybrid Toolbox, User's Guide," 2012.

Bemporad, A.,G.Ferrari-Trecate, and M.Morari, "*Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems*," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 45, no. 10, pp. 407-427, Mar 1999.

Borrelli, F, A. Bemporad and M. Morari, Predictive Control for linear and hybrid systems, 2011.

Boyd, S, Vandenberghe L., 2004, Convex Optimization, Cambridge University Press.

Camacho, E.F., Bordons, C., 1999, *Model Predictive Control 2nd edition*, Springer-verlag-London.

Chaharsooghi, S.K and M. Ashrafi, "Neofuzzy TOPSIS Method," vol. 2014, 2014.

Chopra, S and P. Meindl, Supply Chain Management, Strategy, Planning, and Operation, New Jersey: Prentice Hall, 2007.

Christopher, M, Logistics & Supply Chain Management, Great Britain: Pearson Education Limited, 2011.

De la Peña, M, "*Stochastic programming applied to model predictive control*," in 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, 2015, pp. 1361–1366.

Demirtas, E.A and Ö. Üstün, "An integrated multiobjective decision making process for supplier selection and order allocation," *Omega*, vol. 36, no. 1, pp. 76–90, 2008.

Dua, V, Bozinis N. A., & Pistikopoulos, E. N.(2002). *A multiparametric programming approach for mixed-integer quadratic engineering problems*. Computers & Chemical Engineering, 26(4–5), 715–733.

Eindhoven, T. U, *Model predictive control for stochastic systems by randomized algorithms*. 2004.

Elaydi, S, 2005, *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed., Springer Science and Business Media, inc., USA.

Gallego, G, Kaan Karticioglu and Bala Ramachandran, "Inventory management under highly uncertain demand," *Operation Research Letters*, vol. 35, pp. 281-289, 2007.

Grillet, P. A, *Abstract Algebra*, 2nd ed. New York: Spgelanganger Science and Business Media, LLC, 2007.

Guerrero, W, T. Yeung and C. Guéret, "Joint-optimization of inventory policies on a multi-product multi-echelon pharmaceutical system with batching and ordering constraints," *European Journal of Operational Research*, vol. 231, pp. 98-108, 2013

Guo, C and L. Xueping, "A multi-echelon inventory system with supplier selection and order allocation under stochastic demand," *Int. J. Production Economics*, vol. 151, pp. 37-47, 2014.

Hajji, A, A. Gharbi, J.P. Kenne and R. Pellerin, "Production control and replenishment strategy with multiple suppliers," *European Journal of Operational Research*, vol. 208, pp. 67-74, 2011.

Haksever, C and J. Moussourakis, "A model for optimizing multi-product inventory systems with multiple constraints," *International Journal of Production Economics*, vol. 97, pp. 18-30, 2005.

Heemels, W, B. De Schutter, and A. Bemporad. *Equivalence of hybrid dynamical models*. Automatica, 37:1085 – 1091, July 2001.

Heri Sulistyo Utomo, R, Widowati, Dita Anies, dan Yuliyah Hambyah Asnawi, Pengendali Impulsif pada Sistem Diskret Chaos, Jurnal Matematika, Vol. 20, No. 1, 2017

Ignaciuk, P and A. Bartoszewicz, "Linear-quadratic Optimal Control Strategi for Periodic-review Perishable System," *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, vol. 20, pp. 1400-1407, 2010.

Izadikhah, V, "Group Decision Making Process for Supplier Selection with TOPSIS Method under Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Numbers," vol. 2012, 2012.

Julius Agung, A, et al. Hybrid model predictive control of induction of Eschericia coli. Proceedings of the 48th IEEE Conference in decision and Control. New Orleans, LA, USA, Dec. 2007

- Kafoglis, C. C. "Maximize competitive advantage with a supply," *Hydrocarbon Processing*, pp. 47-50, 1999.
- Kara, S.S, "Supplier selection with an integrated methodology in unknown environment," *Expert Systems with Applications*, vol. 38, pp. 2133-2139, 2011.
- Lazar, M, W. Heemels, S. Weiland and A. Bemporad, "Stabilizing Model Predictive Control of Hybrid Systems," *IEEE Transactions On Automatic Control*, vol. 51, no. 14, pp. 1813-1818, 2006.
- Levi, D.S, *Designing and Managing the Supply Chain*, USA: McGraw-Hill Companies, Inc., 2000.
- Li, Z, W. K. Wong, and C. K. Kwong, "An Integrated Model of Material Supplier Selection and Order Allocation Using Fuzzy Extended AHP and Multiobjective Programming," vol. 2013, 2013.
- Maciejowski, J. M, *Predictive Control with Constraint*. USA: Prentice Hall International, 2001.
- Mayne, D, "Constrained model predictive control: Stability and optimality," *Automatica*, vol. 36, pp. 789-814, 2000.
- Minner, S, "Multiple-supplier inventory models in supply chain management: A review," *Int. J. Production Economics*, Vols. 81-82, pp. 265-279, 2003.
- Mital, K, *Optimization Methods in Operation Research and Systems Analysis*, Third. New Delhi: International(P) Ltd., 1996.
- Monteiro, M.M, J. E. Leal, and F. M. P. Raupp, "A Four-Type Decision-Variable MINLP Model for a Supply Chain Network Design," vol. 2010, 2010.
- Mousavi, S. M, S. Niaki, A. Bahreininejad and S. N. Musa, "Multi-Item Multiperiodic Inventory Control Problem with Variable Demand and Discounts: A Particle Swarm Optimization Algorithm," *The Scientific World Journal*, vol. 2014, p. 16, 2014.
- Oberdieck, R, EN Pistikopoulos, 2015, *Explicit hybrid model-predictive control: The exact solution*, *Automatica*. 58, 152-159
- Ogata, Katsuhiko, 1995, *Discrete Time Control System*, Prentice Hall, USA.
- Olsder, G.J, *Mathematical Systems Theory*. The Netherlands: Faculty Technical Mathematics and Informatics Delft University of Technology, 1994.
- Pan, W, F. Wang, Y. Guo, and S. Liu, "A Fuzzy Multiobjective Model for Supplier Selection under Considering Stochastic Demand in a Supply Chain," 2014.
- Pistikoulous, N, "*Linear Model Predictive Control Via Multiparametric Programming*", Wiley-CVH 2007.

Prada De Caesar, Sarabia D., Cristea S. *Modelling and Control of four tanks mixed logic dynamical (MLD) system*. Dynamic of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms 12(2005) 243-263. Watam Press, 2005.

Prada, C, S. Cristea, D. Megias and J. Serrano, *Hybrid control of a four tanks system*, ADCHEM'03, IFAC, Honk-Kong, 2001.

Qin Joe, S., Badgwell A. Thomas. A survey of industrial model predictive control technology. Control Engineering practice. Elsevier, 2002

Razmi, J. and H. Rafiei, "An integrated analytic network process with mixed-integer non-linear programming to supplier selection and order allocation," *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol. 49, no. 9–12, pp. 1195–1208, 2010.

Saeed, Q, Uddin Vali, Katebi Reza. *Multivariable Predictive PID Control for Quadruple Tank*. International Journal of Computer, Electrical. Automation, Control and Information Engineering Vol:4, No:7,2010.

Scott, L. C, "Hoeffding ' s Inequality Markov ' s Inequality Hoeffding ' s Inequality," pp. 1–5, 2014.

Stoorvogel, A. A, "Model predictive control by randomized algorithms for systems with constrained inputs and stochastic disturbances," pp. 1–26, 2007.

Stoorvogel, A. A and A. Saberi, "The discrete algebraic Riccati equation and linear matrix inequality 1 Introduction 2 The discrete algebraic Riccati equation," pp. 1–36, 1998.

Sutrisno, Salmah and I. E. Wijayanti, "*Distributed model predictive control and application to irrigation canal*," 2012 IEEE Conference on Control, Systems & Industrial Informatics, Bandung, 2012, pp. 126-130.

Sutrisno, Widowati, R. Heru Tjahjana and Solikhin, Deterministic Dynamic Programming Approach to Solve an Integrated Dynamic Supplier Selection and Inventory Control, Adv. Science latter, Vol. 23, No. 7, pp. 6559-6561, 2017

Sutrisno, Widowati, and R. Heru Tjahjana, Dynamic Optimization Approach for Integrated Supplier Selection and Tracking Control of Single Product Inventory System with Product Discount, Proceeding of Indonesian Operation Research Association - International Conference on Operations Research (IORA-ICOR) 2016, Bogor, Indonesia, August 27, 2016, doi:10.1088/1757-899X/166/1/012028.

Sutrisno, and Solikhin, Integrated Supplier Selection and Inventory Control of Probabilistic Single Product Inventory System with Product Discount and Its Optimal Strategy by Using Stochastic Dynamic Programming, Proceeding of Indonesian Operation Research Association - International Conference on Operations Research (IORA-ICOR) 2016, Bogor, Indonesia, August 27, 2016.

Sutrisno, Widowati, and R. Heru Tjahjana, Optimal Strategy for Supplier Selection Problem Integrated with Optimal Control Problem of Single Product Inventory System with Piecewise Holding Cost, Asian Mathematical Conference (AMC) 2016, Bali, August 25-29, 2016, (in press).

Sutrisno, Widowati, and R. Heru Tjahjana, Optimal Strategy for Integrated Dynamic Inventory Control and Supplier Selection in Unknown Environment via Stochastic Dynamic Programming, Proceeding of International Congress on Theoretical and Applied Mathematics, Physics and Chemistry (The Science) 2016 Bandung, 29 April 2016, doi:10.1088/1742-6596/725/1/012008.

Sutrisno, and Purnawan Adi Wicaksono, Dynamic Supplier Selection Problem Considering Full Truck Load in Probabilistic Environment, Proceeding of Annual Conference on Industrial and System Engineering (ACISE) 2016, Yogyakarta, Indonesia, October 6–7, 2016 (in press).

Sutrisno and Purnawan Adi Wicaksono, "Optimal Strategy for Multi-product Inventory System with Supplier," in *Industrial Engineering and Service Science 2015*, Indonesia, 2015.

Sutrisno, Widowati and Solikhin, Optimal Strategy for Integrated Dynamic Inventory Control and Supplier Selection in Unknown Environment via Stochastic Dynamic Programming, Journal of Physics: Conference Series 725, 2016, doi:10.1088/1742-6596/725/1/012008.

Sutrisno, Widowati, and D. A. Munawwaroh, "Hybrid mathematical model of inventory system with piecewise holding cost and its optimal strategy," in *2015 International Conference on Advanced Mechatronics, Intelligent Manufacture, and Industrial Automation (ICAMIMIA)*, 2015, pp. 29–33. doi:10.1109/ICAMIMIA.2015.7507996.

Tao, Yang. 2001. *Impulsive Systems and Control: Theory and Application*, New York: Nova Science.

Team, L. S, LINGO: The Modeling Language and Optimizer, Illinois: Lindo Systems Inc., 2014.

Wang, W, Daniel E. Rivera and Karl G. Kempf, "Model predictive control strategies for supply chain management in semiconductor manufacturing," *International Journal of Production Economics*, vol. 107, pp. 56-77, 2007.

Ware, N.R, S. P. Singh and D. K. Banwet, "A mixed-integer non-linear program to model dynamic supplier Selection Problem," *Expert Systems with Applications*, vol. 41, pp. 671-678, 2014.

Widowati, R. Heru Tjahjana, Sutrisno and Yehezkiel Agatha, Bi-objective Model Predictive Controller for Supply Chains Management without Delay, *Adv. Science latter*, Vol. 23, No. 7, pp. 6575-6578, 2017

Widowati, R. Heru Tjahjana, and Sutrisno, Joint Decision on Integrated Supplier Selection and Stock Control of Inventory System Considering Purchase Discount, *Int. J Sup. Chain. Management*, Vol. 4, No. 4, 2017 (in Press).

Widowati, Sutimin. *Pemodelan Matematika: Analisis dan Aplikasinya*. Undip Press, 2013.

Winston, W. L, Operations Research: Applications and Algorithms, 2004.W. P. M. H. Heemels, B. De Schutter, and A. Bemporad. On the equivalence of classes of hybrid

dynamical models. In Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, pages 364 – 369, Dec. 2001.

Wu, C, C. Hsieh, and K. Chang, "A Hybrid Multiple Criteria Decision Making Model for Supplier Selection," vol. 2013, 2013.

Xu, Liguang dan Sam, Shuzhi Ge. Set-Stabilization of Discrete Chaotic Systems via Impulsive Control. Applied Mathematics Letters, 53 (2016) 52-62.

Yang, B, L. Sui and P. Zhu, "Research on Optimal Policy of Single-Period Inventory Management with Two Suppliers," The Scientific World Journal, vol. 2014, p. 5, 2014.

Zeydan, M, C. Çolpan, and C. Çobanoğlu, "A combined methodology for supplier selection and performance evaluation," *Expert Syst. Appl.*, vol. 38, no. 3, pp. 2741–2751, 2011.

INDEKS

A

asimtotik 6, 7, 10, 11, 12, 34

B

backorder 43, 46, 53

biaya pembelian 82, 89

biaya pembelian per unit 82, 86, 89, 104

biaya minimal 82, 83

biaya penyimpanan per unit 67, 76, 82, 89, 104, 105, 109

bi-objective 51, 52, 55, 56

C

chaos 18, 19, 20, 21, 22, 23, 35, 36, 41

D

dampak ketidakpastian permintaan 134

definit negatif 8, 11, 12

definit positif 7, 8, 10, 11, 12

diferensi 9, 11

dinamika penawaran 102

distribusi normal 121, 126

E

evolusi tingkat persediaan 120

F

feasible 42, 43, 45, 46

fungsi 1, 7, 8, 9, 10, 20, 21, 49, 64, 93, 109

formulasi *stage cost* 49

fungsi biaya ekonomik 45, 49

fungsi tujuan kuadratik 46

filter Kalman 114

G

Gangguan 44

Globally exponentially stable 24, 33, 34

H

Hibrid 57, 63, 64, 65, 67, 75

holding cost 46, 74

I

impulsif 20, 21, 22, 23, 35, 36, 37, 38, 41

input 64, 72, 80, 114

inventori 43, 46, 65, 102
 item 72
 industri manufaktur 113
 indeks produksi 89
 indeks pemasok 89, 109
invariant discrete time state space
 66

K

kasus deterministik 110
 kapasitas gudang 114
 kapasitas maksimal 88
 kapasitas penyimpanan 76,
 89, 92, 109
 kapasitas pemasok 83, 92, 108,
 116, 123
 kapasitas maksimal penyimpanan
 81, 111
 kendala 46, 47, 48, 57, 58,
 59, 62, 88, 92, 105, 108
 kendala akhir 47, 48, 51, 55, 92
 kendali prediktif 48, 49, 51,
 55, 57
 kendali prediktif dengan dua tujuan
 49, 51, 56
 kendali prediktif ekonomik 48, 56

keadaan setimbang 4, 5, 12, 44,
 45, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 55
 keadaan setimbang optimal 44,
 45, 46, 51

kontinu sepotong-sepotong 65

keterkendalian 1, 13, 14

keteramatan 1, 15, 17

keterstabilan 18

ketidakpastian 86

L

lintasan 35, 40, 41

literal 59

Lyapunov 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12

M

manufaktur 93, 102, 113

matriks 11, 12, 13, 14, 16,
 17, 18, 20, 43, 47, 64, 77

matriks bobot 64

multi-produk 88, 108

multi-periode 89, 108

multiple input 1

multiple output 1

Mixed Logical Dynamical 57

N

Norm euclides 5

Non singular 4, 11, 12

O

Optimasi 46, 5, 57, 64, 83, 87, 88, 93, 95, 117, 133

Optimal 45, 64, 71, 80, 96, 100, 110

Output 70, 72, 80, 104, 114, 115

Open unit disc 18

P

parameter 7, 50, 70, 88, 90, 108

parameter random 102, 112, 113

periode sampling 9, 13

persamaan ruang keadaan 63

permintaan produk 74

permintaan konsumen 44, 54

pesanan 53

Pemrograman dinamis 93, 112

pengecer 43, 52, 53, 182

Piecewise Objectives 81, 93

prediksi horizon

preposisi 58, 59

produsen 43, 52, 53

produk tunggal 102

program kuadrat integer murni 124

pemrograman dinamis stokastik 124

R

random 102, 105

rank 14, 17

rantai pasokan 43, 52, 54

rujukan 89, 96, 101, 120, 133

S

safety stock 50

semidefinit negatif 8, 10

semidefinit positif 8, 13

sistem dinamik logika 56

sistem hibrid 63, 64, 75

sistem *piecewise affine* 63, 64

sistem dengan waktu diskrit 2, 9, 10, 11, 13, 44

sistem dinamik hybrid

single input 1

single output 1

stabilitas 4

stock level interval 66

stokastik 83, 112, 113, 117,
124

T

titik nadir 50

titik utopia 50

tingkat persediaan 72, 73, 79, 80,
81, 83, 85, 87, 89, 90, 92, 94, 97, 99,
102, 109, 111, 114, 119, 122

transisi keadaan diskrit

V

variabel biner 57, 71

variabel biner artifisial 71

variabel logika 59, 60

vektor keadaan 4, 9, 10, 13,
16, 42, 43, 76

vektor gangguan 42, 43

vektor masukan 42, 43

variabel 20, 44, 57, 58, 60,
61, 62, 102, 105, 108

BIODATA PENULIS



Prof. Dr. Widowati, S.Si, M.Si., lahir di Kebumen. Lulus S1 Matematika Universitas Diponegoro tahun 1993, Lulus S2 dan S3 Matematika Institut Teknologi Bandung berturut-turut pada tahun 2000 dan 2005. Sejak tahun 1994 sampai sekarang menjadi dosen tetap di Departemen Matematika Universitas Diponegoro(UNDIP) Semarang. Sejak tahun 2014 menjadi Guru Besar dibidang Pemodelan Matematika dan Sistem Kendali. Penulis juga berpengalaman di bidang menejerial sebagai Ketua Jurusan Matematika(2008-2011), Wakil ketua Indonesian Mathematical Society wilayah Jawa Tengah (2010-2014), Wakil Dekan FMIPA bidang Sumber daya(2011-2015), dan Dekan FSM UNDIP (2015-2019). Disamping mengajar di Program Studi(PS) S1, dan S2 di lingkungan UNDIP, penulis juga mengajar di PS S2 Pendidikan Matematika Universitas Negeri Semarang dan Universitas Terbuka serta membimbing mahasiswa program doktor. Selain mengajar matakuliah Sistem Kontrol Diskrit, Sistem Kontrol Linear, Kontrol Tak Linear, Kontrol Optimal, Kalkulus, dan Pemodelan Matematika, juga aktif melaksanakan penelitian dan pengabdian pada masyarakat. Hasil-hasil penelitiannya telah dipublikasikan baik di tingkat Nasional maupun Internasional. Beberapa buku dan modul praktikum untuk pendidikan tinggi telah dihasilkan. Buku Kalkulus telah diterbitkan tahun 2012. Buku Pemodelan Matematika: Analisis dan aplikasinya juga telah diterbitkan tahun 2013. Penulis juga aktif berpartisipasi dalam pengembangan olimpiade matematika melalui pelatihan guru, siswa, mahasiswa dan menjadi Juri baik ditingkat regional maupun Nasional.



Dr. R. Heru Tjahjana, lahir di kota Surakarta, Jawa Tengah pada tanggal 17 Juli 1974, menyelesaikan pendidikan sarjana sains (S.Si) dan magister sains (M.Si) dalam bidang matematika berturut – turut pada tanggal 19 Agustus 1998 dan 25 September 2001 dari Universitas Gadjah Mada Yogyakarta dan Doktor matematika (Dr.) pada tanggal 1 Oktober 2010 dari Institut Teknologi Bandung. Karier sebagai dosen dimulai sebagai calon dosen FMIPA Undip Karyasiswa DUE Project (1999-2000) dan sebagai dosen tetap pada tahun 2000-sekarang. Bidang riset yang ditekuninya adalah kontrol optimal dan kontrol multi agen masing-masing beserta aplikasinya. Mengajar pada Progm studi S1 dan S2 di lingkungan Universitas Diponegoro. Selain itu penulis terlibat juga dalam pelatihan olimpiade matematika baik bagi siswa maupun mahasiswa.



Sutrisno, S.Si, M.Sc, lahir di Cilacap pada tanggal 01 September 1986, menyelesaikan pendidikan Strata-1 dengan gelar S.Si. (Sarjana Sains) di Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang pada tahun 2009 dan menyelesaikan pendidikan strata-S2 dengan gelar M.Sc. (Master of Science) di Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta pada tahun 2012. Sejak tahun 2014 sampai sekarang, ia menjadi dosen di Departemen Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang dan mengampu beberapa mata kuliah diantaranya Metode Numerik, Riset Operasi, Program Dinamik, Statistika Matematika, dan Pemodelan Stokastik. Selain mengajar, ia juga aktif dalam bidang penelitian dan pengabdian kepada masyarakat yang menghasilkan luaran berbagai artikel ilmiah yang diterbitkan di berbagai media seperti jurnal ilmiah berkala (nasional dan internasional) dan seminar/konferensi nasional dan internasional.



**Penerbit & Percetakan
UNDIP Press
SEMARANG**



Metode Kendali Diskrit Teori dan Simulasinya

ORIGINALITY REPORT

8%

SIMILARITY INDEX

5%

INTERNET SOURCES

4%

PUBLICATIONS

5%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1

file.upi.edu

Internet Source

<1%

2

Tongwen Chen. "A model predictive control approach to networked systems", 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control, 12/2007

Publication

<1%

3

D U H E Hakim, Sutrisno, Widowati. "Quadratic programming model for optimal decision making of supplier selection problem integrated with inventory control problem", Journal of Physics: Conference Series, 2019

Publication

<1%

4

Sutrisno Sutrisno, Widowati Widowati, R. Heru Tjahjana. "Robust Predictive Control Application and Simulation of Inventory Controlling with Imperfect Delivery Process", 2019 International Conference on Information and Communications Technology (ICOIACT), 2019

Publication

<1%

5	Potocnik, B.. "Hybrid modelling and optimal control of a Multiproduct Batch Plant", Control Engineering Practice, 200409 Publication	<1 %
6	www.colt2010.org Internet Source	<1 %
7	id.scribd.com Internet Source	<1 %
8	Submitted to President University Student Paper	<1 %
9	Robert T. Buche, Arka Ghosh, Vlasdas Pipiras. "Heavy traffic limits in a wireless queueing model with long range dependence", 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control, 2007 Publication	<1 %
10	tailieu.vn Internet Source	<1 %
11	www.bip.org.bd Internet Source	<1 %
12	Submitted to Technische Universiteit Delft Student Paper	<1 %
13	beagle.u-bordeaux4.fr Internet Source	<1 %
14	www.thinkartlab.com Internet Source	<1 %

15

id.123dok.com

Internet Source

<1 %

16

Submitted to Universitas Brawijaya

Student Paper

<1 %

17

Randjelovic, J.. "On the pth moment exponential stability criteria of neutral stochastic functional differential equations", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 20070201

Publication

<1 %

18

Submitted to Udayana University

Student Paper

<1 %

19

C. Califano, S. Monaco, D. Normand-Cyrot. "On the discrete-time normal form", IEEE Transactions on Automatic Control, 1998

Publication

<1 %

20

www.ce.utexas.edu

Internet Source

<1 %

21

Mathematical Physics, 2013.

Publication

<1 %

22

A. Pulkkinen. "Automatic Determination of the Conic Coronal Mass Ejection Model Parameters", Solar Physics, 11/13/2009

Publication

<1 %

23

web.mit.edu

Internet Source

<1 %

24	Submitted to iGroup Student Paper	<1 %
25	bayanbox.ir Internet Source	<1 %
26	lipari.ing.unimo.it Internet Source	<1 %
27	ses.library.usyd.edu.au Internet Source	<1 %
28	juplizdungbulus.blogspot.com Internet Source	<1 %
29	eprints.uny.ac.id Internet Source	<1 %
30	Submitted to University of Wollongong Student Paper	<1 %
31	Submitted to Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia Student Paper	<1 %
32	docplayer.info Internet Source	<1 %
33	download-pdfguide.rhcloud.com Internet Source	<1 %
34	Vesely, Vojtech, and Danica Rosinov. "Robust Model Predictive Control Design", Model Predictive Control, 2010.	<1 %

35

Submitted to CSU, San Jose State University

Student Paper

<1 %

36

Submitted to Sultan Agung Islamic University

Student Paper

<1 %

37

ojs.excelingtech.co.uk

Internet Source

<1 %

38

dot.ch.gatech.edu

Internet Source

<1 %

39

serval.unil.ch

Internet Source

<1 %

40

Shreyas Sundaram. "Distributed function calculation and consensus using linear iterative strategies", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 5/2008

Publication

<1 %

41

fr.scribd.com

Internet Source

<1 %

42

P. K. Dash, A. K. Pradhan. "Fast and Accurate Estimation of Power System Frequency for Power Quality Studies", Electric Power Components and Systems, 2002

Publication

<1 %

43

export.arxiv.org

Internet Source

<1 %

44	ediss.uni-goettingen.de Internet Source	<1 %
45	Submitted to University of Birmingham Student Paper	<1 %
46	cpnl.esigelec.fr Internet Source	<1 %
47	Submitted to Gyeongsang National University Student Paper	<1 %
48	N. Giorgetti, A. Bemporad, H.E. Tseng, D. Hrovat. "Hybrid Model Predictive Control Application Towards Optimal Semi-Active Suspension", Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 2005. ISIE 2005., 2005 Publication	<1 %
49	arxiv.org Internet Source	<1 %
50	Submitted to University of Sheffield Student Paper	<1 %
51	repositorio.unicamp.br Internet Source	<1 %
52	anzdoc.com Internet Source	<1 %
53	vdocuments.site Internet Source	<1 %

54	Submitted to Sriwijaya University Student Paper	<1 %
55	Submitted to Catholic University of Parahyangan Student Paper	<1 %
56	docobook.com Internet Source	<1 %
57	Submitted to Coventry University Student Paper	<1 %
58	repository.its.ac.id Internet Source	<1 %
59	Marziyeh Keshavarz, Mojtaba Barkhordary, Mohammad Reza Jahed Motlagh. "Mixed logic dynamical modeling and control of steam boiler", 2007 International Conference on Control, Automation and Systems, 2007 Publication	<1 %
60	www.faculty.iu-bremen.de Internet Source	<1 %
61	S.V. Alekseenko. "Equations and laws of vortex motion", Theory of Concentrated Vortices, 2008 Publication	<1 %
62	www.dynasupport.com Internet Source	<1 %

63	text-id.123dok.com Internet Source	<1 %
64	lijeka.wordpress.com Internet Source	<1 %
65	Submitted to Universitas Sebelas Maret Student Paper	<1 %
66	fgg-web.fgg.uni-lj.si Internet Source	<1 %
67	repository.unhas.ac.id Internet Source	<1 %
68	verizonaonlinepublishing.com Internet Source	<1 %
69	tobiasgeyer.org Internet Source	<1 %
70	Przemyslaw Ignaciuk, Andrzej Bartoszewicz. "DSM control of inventory systems with deteriorating stock and multiple supply sources", 2011 16th International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics, 2011 Publication	<1 %
71	zadoco.site Internet Source	<1 %
72	www.cara-internet.com Internet Source	<1 %

73	worldwidescience.org Internet Source	<1 %
74	muh-didiharyono.blogspot.com Internet Source	<1 %
75	zh.scribd.com Internet Source	<1 %
76	Ligang Wu, Changhong Wang, Huijun Gao, Qingshuang Zeng. "Sliding mode control of uncertain systems with distributed time-delay: parameter-dependent Lyapunov functional approach", Journal of Control Theory and Applications, 2006 Publication	<1 %
77	Submitted to Nottingham Trent University Student Paper	<1 %
78	Jian Yang. "A Production-Inventory System with Markovian Capacity and Outsourcing Option", Operations Research, 03/2005 Publication	<1 %
79	Luisella Balbis. "Tutorial introduction to the modelling and control of hybrid systems", International Journal of Modelling Identification and Control, 2007 Publication	<1 %
80	Muhammad Fauzan Luthfi, Sutrisno, Widowati.	<1 %

"Stock Control of Single Product Inventory System with Imperfect Delivery by Using Robust Linear Quadratic Regulator", 2018 4th International Conference on Science and Technology (ICST), 2018

Publication

81

Submitted to University of Liverpool

Student Paper

<1%

82

G. L. Zheng. "of overparametrization in non-linear system identification and neural networks", International Journal of Systems Science, 4/15/2002

Publication

<1%

Exclude quotes Off

Exclude matches Off

Exclude bibliography Off